

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
(МИИТ)**

Кафедра “Прикладная математика-1”

**А.С. Братусь, А.С. Новожилов,
Родина Е.В.**

**ДИСКРЕТНЫЕ
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ**

Учебное пособие

Москва – 2005

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)**

Кафедра “Прикладная математика-1”

**А.С. Братусь, А.С. Новожилов,
Родина Е.В.**

**ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ**

**Учебное пособие по курсу
«Динамические системы и модели
экологии» для студентов специальности
«Прикладная математика и информатика»**

Москва – 2005

УДК 519.8
Б 87

Братусь А.С., Новожилов А.С., Родина Е.В.
Дискретные динамические системы и математические модели в экологии: Учебное пособие. – М.: МИИТ. 2005 – 139 с.

Учебное пособие содержит изложение разделов курса «Динамические системы и модели экологии», читаемого на четвертом курсе специальности «Прикладная математика и информатика». В учебном пособии рассмотрены дискретные динамические системы и их приложения к анализу поведения экологических систем. Особое внимание уделено исследованию устойчивости неподвижных точек и бифуркаций положения равновесия. Рассмотрены конкретные математические модели роста популяций, а также системы Лотка-Вольтерра взаимодействующих популяций.

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, зав. каф. «Высшая математика» МИИТа, доцент
В.Б. Минасян,
кандидат физико-математических наук, доцент МИЭМ
Н.И. Королева

© Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 2005

Содержание

0. Одномерные нелинейные динамические системы с дискретным временем и их применение	5
1.1 Простейшие модели роста популяции.....	7
1.2 Графическая процедура построения решений.....	11
1.3 Устойчивость неподвижных точек и бифуркации положения равновесия.....	15
1.4 Периодические решения, хаос	28
1.5 Примеры анализа дискретных динамических систем, заданных качественным образом	37
1.6 Ляпуновский показатель в одномерном случае.....	49
1.7 Некоторые распространенные модели и пояснения	52
1.8 Эффект Олли и его моделирование.....	54
1.9 Дискретные модели с запаздыванием	57
1.10 Упражнения.....	62
2. Многомерные динамические системы с дискретным временем и их применение	68
2.1 Линейные динамические системы с дискретным временем.....	69
2.2 Динамика возрастного состава популяции. Модель Лесли.....	72
2.3 Некоторые определения и обобщения.....	77
2.4 Гиперболические неподвижные точки дискретных динамических систем	81
2.5 Различные типы бифуркаций. Коразмерность	87

	бифуркаций.....	
2.6	Бифуркация Неймарка-Сакера. Рождение замкнутой инвариантной кривой.....	89
2.7	Теорема о центральном многообразии	97
2.8	Примеры математических моделей взаимодействующих популяций.....	103
2.9	Падение и взлет численности в математической модели популяции жука <i>Tribolium</i>	117
2.10	Многомерные показатели Ляпунова	120
2.11	Области притяжения аттракторов динамических систем. Фракталы.....	127
2.12	Упражнения	131
	Литература	135

1

Одномерные нелинейные динамические системы с дискретным временем и их применение

Многие биологические популяции не обладают свойством непрерывного изменения численности, рост численности последовательных поколений происходит в дискретные моменты времени. Для примитивных организмов промежутки между этими моментами времени могут быть достаточно короткими, и в этом случае непрерывная по времени модель может быть подходящей аппроксимацией реального процесса. Однако, в зависимости от конкретного биологического вида, длина шага времени может сильно варьироваться. В основном свойство неперекрывающихся поколений относится к различным видам насекомых. Условно промежуток времени между последовательными поколениями можно назвать годом. Математические модели, таким образом, должны выражать численность популяции в момент $t+1$, которую обозначим как N_{t+1} , через численность в предыдущий момент времени t , которую обозначим как N_t (то есть численность популяции через “год”, которая полностью определяется настоящим моментом времени). Это приводит нас к

необходимости изучения разностных уравнений, или дискретных динамических систем, в форме

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad N_t \in R, \quad f: R \rightarrow R, \quad (1.1)$$

или, эквивалентно,

$$N \mapsto f(N), \quad N \in R, \quad (1.1')$$

где f – заданное отображение, обычно зависящее от ряда параметров.

Например, известное уравнение Ферхюльста является частным случаем динамической системы (1.1), (1.1’):

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right), \quad r, K > 0.$$

В этом уравнении r, K – положительные параметры, $f(N) = rN(1 - N/K)$.

Отличительной чертой скалярных дискретных динамических систем (1.1), (1.1’) является возможность их простого итерирования при задании некоторого начального условия (начальной численности популяции) N_0 , которое можно проделать вручную или с помощью компьютера, и которое не требует от исследователя никакого знания методов высшей математики. Однако даже такое простое итерирование может оказаться чрезвычайно полезным, что отмечал один из создателей современной биоматематики, биолог Роберт М. Мэй. Еще в 1976 году он писал: “Поэтому я настоятельно советую, чтобы люди познакомились, скажем, с уравнением Ферхюльста на раннем этапе своего обучения математике. Это уравнение можно изучать феноменологически, итерируя его на калькуляторе или даже вручную. Его изучение даже не требует всего множества сложных понятий, которые используются в

элементарном анализе. Такое изучение очень обогащало бы интуитивные представления учащегося о нелинейных системах. Для всех нас было бы лучше, если бы не только в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно больше людей поняло, что простые нелинейные системы не всегда обладают простыми динамическими свойствами.” [5]

1.1 Простейшие модели роста популяции

Пример 1.1 Одной из наиболее старых задач является задача о росте числа кроликов, “природа которых такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения”. Эта задача была опубликована в 1202 году в “Трактате о счете”, а ее решением является ряд Фибоначчи. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \quad (1.2)$$

где N_t – число пар кроликов в t -ый месяц. Отметим, что в этой задаче кролики наделены бессмертием. Уравнение (1.2) является линейным однородным разностным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные однородные разностные уравнения k -го порядка с постоянными коэффициентами, в общем виде

$$u_{t+k} + a_1 u_{t+k-1} + a_2 u_{t+k-2} + \dots + a_k u_t = 0, \quad (1.3)$$

обладают естественными для линейных уравнений свойствами: если u^1, u^2 – решения уравнения (1.3), то $Au^1 + Bu^2$ – так же решение (1.3), где A, B – произвольные постоянные; общее решение (1.3) можно записать в виде $u_t = C_1 u_t^1 + C_2 u_t^2 + \dots + C_k u_t^k$, где C_i – произвольные

постоянные, u_i^i – линейно независимые частные решения (1.3), $i = 1, 2, \dots, k$. Для отыскания k независимых частных решений необходимо рассмотреть характеристическое уравнение

$$p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k = 0,$$

которое получается из (1.3), если сделать подстановку $u_i = p^t$ и затем сократить все равенство на p^t . По теореме Безу характеристическое уравнение имеет ровно k , считая кратности, комплексных корней. Если p_i – действительный корень кратности один, то частное решение $u_i^i = p_i^t$, если p_i – действительный корень кратности m , то m частных решений, отвечающих этим m корням, $u_i^i = C_1 p_i^t + \dots + C_m t^{m-1} p_i^t$, если p_i – комплексный корень, то в качестве действительных частных решений можно взять $\text{Re } p_i^t$ и $\text{Im } p_i^t$. Для получения единственного решения уравнения (1.3), необходимо задать k начальных условий вида $u_0 = b_0, u_1 = b_1, \dots, u_{k-1} = b_{k-1}$, где b_i – известные числа.

Найдем решение уравнения (1.2). Если сделать подстановку $N_t = p^t$, то для p получим квадратное характеристическое уравнение $p^2 - p - 1 = 0$, решение которого $p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Следовательно, общее решение уравнения (1.2) имеет вид $N_t = C_1 p_1^t + C_2 p_2^t$. Если задать начальные условия, например, $N_0 = 0, N_1 = 1$, то произвольные постоянные определяются единственным образом. Окончательно получаем

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t,$$

что дает для $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ряд Фибоначчи $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Пример 1.2 Рассмотрим другую задачу. Пусть N_0 – начальная численность популяции, N_t – ее численность через t лет. Коэффициентом прироста R называется относительное изменение численности за год: $R = (N_{t+1} - N_t)/N_t$. Если эта величина равна постоянной, которую обозначим $r = R$, то закон, управляющий динамикой численности, имеет вид:

$$N_{t+1} = f(N_t) = (1+r)N_t. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) линейно и легко решается. Через t лет численность популяции будет равна $N_t = (1+r)^t N_0$. В зависимости от знака параметра r численность будет либо неограниченно возрастать ($r > 0$), либо уменьшаться ($-1 < r < 0$) по геометрической прогрессии (отметим, что та же формула используется при подсчете сложных индексированных процентов, если r – процентная ставка за некоторый фиксированный промежуток времени, N_0 – величина начального вклада).

В общем случае, учитывая эффекты перенаселения, ограниченности ресурсов, саморегуляции, естественно предположить, что существует некоторая максимально допустимая при неизменных внешних условиях численность популяции N_{max} , причем при $N < N_c$, где $f(N_c) = N_{max}$, $f(N)$ возрастает, при $N > N_c$ $f(N)$ уменьшается (рис.1.1). Другими словами, коэффициент

прироста популяции R оказывается величиной непостоянной, а зависящей от текущей численности N_t .

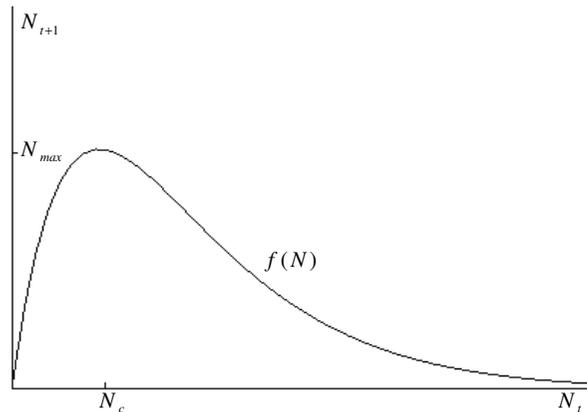


Рис.1.1 Типичный вид функции роста $f(N)$ в одномерной модели $N_{t+1} = f(N_t)$

Пример 1.3 (Логистическое уравнение) Чтобы ограничить экспоненциальный рост, описываемый уравнением (1.4), в 1836 году Ферхюльст предложил упоминавшуюся выше модель роста популяции, в которой коэффициент прироста непостоянен:

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \quad r > 0, K > 0. \quad (1.5)$$

В литературе уравнение (1.5) также называют уравнением Ферхюльста. Здесь параметр K является максимально допустимой численностью популяции, потенциальной емкостью экологической системы. Очевидный недостаток уравнения (1.5) заключается в том, что если $N_t > K$, то $N_t < 0$, что вступает в противоречие с экологической интерпретацией модели.

Другая модель, в которой устранен указанный

недостаток, имеет вид

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}, \quad r > 0, K > 0.$$

Здесь $N_t > 0$ для всех t , если $N_0 > 0$.

1.2 Графическая процедура построения решений

Существует простой и наглядный способ построения решений задачи (1.1). Но прежде чем описывать его, введем следующие определения.

Определение 1.1 Множество всевозможных состояний N_t называется пространством состояний (или фазовым пространством) системы (1.1).

Определение 1.2 Последовательность точек N_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ называется траекторией (или орбитой) системы (1.1), порожденной отображением f .

Определение 1.3 Неподвижными точками системы (1.1) называются такие точки пространства состояний N^* , что $f(N^*) = N^*$.

Пока мы рассматриваем одномерные дискретные динамические системы, поэтому пространство состояний задачи (1.1) – подмножество действительной оси R . Неподвижные точки являются в некотором роде простейшим типом траекторий и соответствуют стационарным состояниям системы (1.1) – если изучаемая система находится точно в неподвижной точке, то в будущем из нее она никуда не уйдет. Однако, так как любая математическая модель представляет собой идеализацию реальной системы, то необходимо знать характер неподвижных точек – если система находится в

малой окрестности неподвижной точки, то останется ли она там в дальнейшем, либо покинет ее, другими словами, устойчива ли неподвижная точка. Кроме термина “неподвижная точка” используются слова критическая, стационарная, особая точка или положение равновесия.

Неподвижные точки задачи (1.1) определяются как решения уравнения $f(N) = N$. Часто $f(N)$ записывают в виде $f(N) = NF(N)$, чтобы подчеркнуть существование неподвижной точки $N = 0$, в этом случае остальные неподвижные точки – решения уравнения $F(N) = 1$. Графически неподвижные точки – это точки пересечения $f(N)$ и биссектрисы первого координатного угла (напомним, что нас интересуют только неотрицательные решения) $N_{t+1} = N_t$. Динамическая эволюция системы может быть получена следующим образом. Пусть дана начальная точка N_0 . Тогда $N_1 = f(N_0)$ – пересечение вертикальной прямой, выходящей из N_0 , с кривой $f(N)$. Прямая $N_{t+1} = N_t$ используется для того, чтобы продолжить процесс, используя N_1 как следующую начальную точку. Затем, как и ранее, получаем $N_2 = f(N_1)$, далее N_3, N_4, \dots (см. рис.1.2). Суммарный путь есть просто серия отражений от биссектрисы $N_{t+1} = N_t$.

На рис.1.2 можно видеть, что $N_t \rightarrow N^*$ при $t \rightarrow \infty$, причем последовательность точек стремится к положению равновесия монотонно. Так как любые малые отклонения от N^* стремятся к нулю, то N^* – устойчивое положение равновесия. Если $f(N)$ имеет вид, изображенный на рис.1.3, то неподвижная точка так же устойчива, но сходимость к этой точке не монотонная, а колебательная.

Иногда удобно изображать траектории на фазовом пространстве. Естественно, что все траектории изобразить невозможно, однако динамический характер поведения системы часто можно определить по нескольким ключевым траекториям, таким как, например, неподвижные точки.

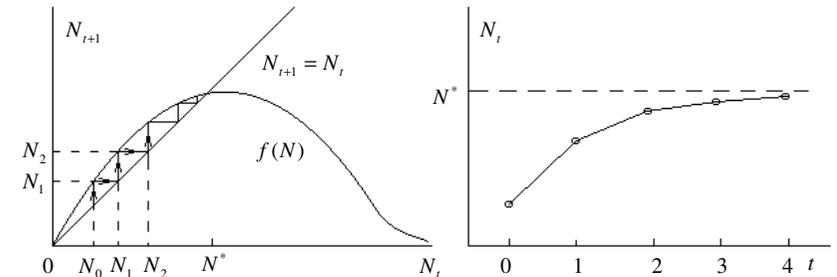


Рис.1.2 Графическая процедура построения решения задачи (1.1).
Случай монотонно устойчивой неподвижной точки

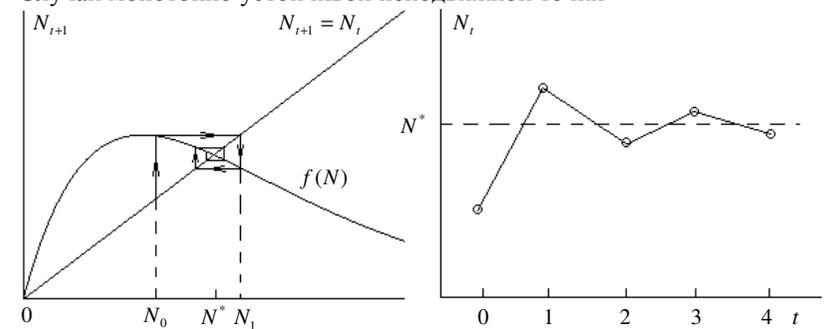


Рис.1.3 Графическая процедура построения решения задачи (1.1).
Случай колебательно устойчивой неподвижной точки

Определение 1.4 *Разбиение пространства состояний на орбиты называется фазовым портретом.*

Соответствующие рис.1.2 и 1.3 фазовые портреты изображены на рис.1.4.

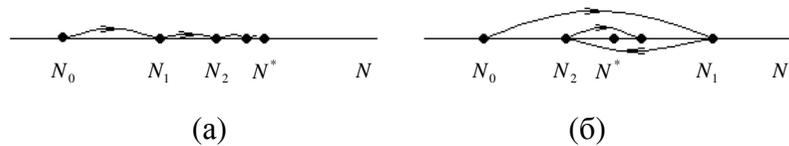


Рис.1.4 Фазовые портреты дискретных динамических систем в окрестности неподвижной точки N^* , соответствующие рис.1.2 – (а) и рис.1.3 – (б).

Отметим, что даже в одномерном случае дискретные динамические системы могут обладать чрезвычайно сложным динамическим поведением. В частности, это можно видеть с помощью изложенного выше графического способа построения решений. Рассмотрим функцию $f(N)$, изображенную на рис.1.5. Имеется две неподвижные точки $N = 0$, $N = N^*$, причем обе неустойчивы, однако последовательность точек $\{N_t\}$, в силу вида функции $f(N)$, ограничена для любого t . Решение блуждает некоторым образом, причем последовательность N_t кажется случайной. Такие решения обычно называют хаотическими.

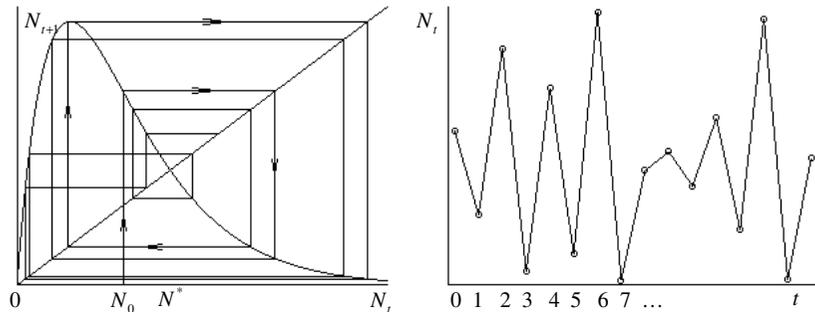


Рис.1.5 Пример нерегулярного, хаотического поведения решения задачи (1.1)

1.3 Устойчивость неподвижных точек и бифуркации положения равновесия

Как уже было отмечено выше, при анализе систем вида (1.1) необходимо знать характер неподвижных точек, так как лишь устойчивые положения равновесия могут наблюдаться на практике, тогда как неустойчивые практически не наблюдаемы в силу погрешности исходных данных и приближенности математических моделей. Понятие устойчивости интуитивно понятно. Например, у маятника существует два положения равновесия – верхнее и нижнее, причем ясно, что нижнее устойчиво (малое шевеление маятника в этом положении не изменит существенно его дальнейшего поведения), тогда как верхнее – нет.

Будем рассматривать дискретную динамическую систему, определяемую отображением f :

$$u \mapsto f(u) = f(u; r), \quad u \in R, \quad r \in R^m, \quad f : R \rightarrow R. \quad (1.6)$$

Определение 1.5 *Неподвижная точка u^* отображения (1.6) называется устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных u_0 из δ -окрестности точки u^* вся траектория системы $u_t, t = 0, 1, 2, 3, \dots$ содержится в ε -окрестности точки u^* .*

Определение 1.5 – стандартное определение устойчивости по Ляпунову. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*$, то точка u^* называется асимптотически устойчивой (или аттрактором). Неустойчивые неподвижные точки иногда называют истоком или репеллером.

Важный случай, для которого можно установить устойчивость неподвижной точки дискретной динамической системы, дается следующей теоремой.

Теорема 1.1 (Принцип сжимающих отображений)

Пусть X – полное метрическое пространство с расстоянием ρ . Предположим, что имеется гладкое отображение $f: X \rightarrow X$, которое удовлетворяет для всех $x, y \in X$ условию $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ для некоторого $0 < \lambda < 1$. Тогда дискретная динамическая система, определяемая отображением f , имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $x^* \in X$. Кроме того, $f^k(x) \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$ для любой начальной точки $x \in X$.

В формулировке теоремы $f^k(x)$ – k -ая суперпозиция отображения f :

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ раз}}$$

Отметим, что в случае теоремы 1.1 нет ограничений на размерность пространства состояний, оно может быть бесконечномерным. Теорема 1.1 гарантирует существование и единственность неподвижной точки и дает глобальную асимптотическую устойчивость: любая орбита сходится к единственной неподвижной точке. Доказательство теоремы 1.1 можно найти в любом стандартном учебнике по функциональному анализу или дифференциальным уравнениям, например, [5,16].

Для анализа устойчивости неподвижных точек системы (1.6) используется следующее

Утверждение 1.1 Пусть u^* – неподвижная точка отображения (2.6), т.е. $u^* = f(u^*)$, и пусть f обратима

в малой окрестности u^* . Тогда u^* устойчива, если $|f_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f_u(u^*)| > 1$. Здесь $f_u(u^*)$ – производная отображения f по u , вычисленная в неподвижной точке u^* .

Доказательство. Представим $u_t = u^* + du_t$, $|du_t| \ll 1$, тогда $u_{t+1} = f(u^* + du_t)$. Запишем $u_{t+1} = u^* + du_{t+1}$. Тогда, используя разложение Тейлора для $f(u)$, получаем

$$u^* + du_{t+1} = f(u^*) + f_u(u^*)du_t + o(du_t),$$

где $o(du_t)$ обозначает величину более высокого порядка малости, чем du_t , при малых du_t , математически это означает, что $\lim_{du_t \rightarrow 0} \frac{o(du_t)}{du_t} = 0$. Воспользовавшись тем, что

u^* – неподвижная точка, разделим все на du_t и, устремив du_t к нулю, получим:

$$\frac{du_{t+1}}{du_t} = f_u(u^*).$$

Если $|du_{t+1}/du_t| < 1$, то $|du_{t+1}| < |du_t|$ и, следовательно, отображение (1.6) в малой окрестности неподвижной точки является сжимающим, по теореме 1.1 неподвижная точка u^* устойчива.

Случай $|f_u(u^*)| = 1$ является особым и требует дополнительного анализа. Кроме того, в силу предположений утверждения 1.1, $|f_u(u^*)|$ не может быть равна нулю.

Величину $f_u(u^*)$ называют собственным значением или мультипликатором неподвижной точки.

Отметим, что устойчивые неподвижные точки отображения (1.6) можно классифицировать в зависимости от знака $f_u(u^*)$. Если $0 < f_u(u^*) < 1$, то неподвижная точка устойчива монотонно (фазовый портрет на рис.1.4(а)), если $-1 < f_u(u^*) < 0$, то малые отклонения сходятся к неподвижной точке колебательным образом (фазовый портрет на рис.1.4(б)).

Пример 1.3 (продолжение) Рассмотрим логистическое уравнение (1.5). Параметром, который определяет поведение траекторий уравнения (1.5), является r , так как заменой $N_t = Ku_t$ (1.5) приводится к виду:

$$u_{t+1} = ru_t(1 - u_t), \quad r > 0, \quad 0 \leq u_t \leq 1. \quad (1.7)$$

Неподвижные точки отображения (1.7) легко находятся: $u_1^* = 0$, $u_2^* = (r-1)/r$. Вторая неподвижная точка существует если $r > 1$. Далее, $f_u(u) = r - 2ru$, $f_u(u_1^*) = r$, следовательно u_1^* устойчива при $0 < r < 1$ и неустойчива при $r > 1$, $f_u(u_1^*) = 1$ при $r = 1$. Пусть $r > 1$, тогда существует вторая неподвижная точка, $f_u(u_2^*) = 2 - r$ и u_2^* устойчива при $1 < r < 3$ и неустойчива, если $r > 3$, $f_u(u_2^*) = -1$ при $r = 3$.

Поведение математических моделей вида (1.1) зависит от ряда параметров (скорость роста популяции, потенциальная емкость экологической системы, смертность и т.д.). При изменении значений параметров может измениться тип неподвижных точек либо их число, другими словами, характер поведения изучаемой

динамической системы становится качественно иным. Важно научиться сравнивать две различные системы. Сравнение любых объектов основано на отношении эквивалентности, позволяющей определять классы эквивалентных объектов и изучать отношения между этими классами. Нам важно точно определить какие две динамические системы вида (1.1) считать качественно похожими или эквивалентными.

Рассмотрим две дискретные динамические системы, не обязательно одномерные, определенные на некотором одном и том же множестве X , подмножестве евклидова пространства.

$$u \mapsto f(u) \quad (1.8)$$

$$v \mapsto g(v) \quad (1.9)$$

Определение 1.7 *Динамическая система (1.8) называется топологически эквивалентной в области $U \subset X$ динамической системе (1.9) в области $V \subset X$, если существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, $h(U) = V$ отображающий орбиты первой системы в U на орбиты второй системы в V , сохраняя ориентацию времени.*

В определении 1.7 под областью понимается замкнутое подмножество X . Гомеоморфизмом называется обратимое взаимно однозначное отображение, такое, что само отображение и его обратное непрерывны. Фазовые портреты топологически эквивалентных систем также называются топологически эквивалентными.

Топологическая эквивалентность означает, что если $v = h(u)$, где h – гомеоморфизм, то должны выполняться соотношения $g(v) = h(f(u))$ или $g(h(u)) = h(f(u))$, что может быть записано в виде $f(u) = h^{-1}(g(h(u)))$, либо,

используя символ суперпозиции $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Два отображения, для которых выполнено это соотношение для некоторого гомеоморфизма h называются сопряженными.

Определение 1.8 *Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении вектора параметров рассматриваемой динамической системы называется бифуркацией.*

Таким образом, бифуркация это изменение топологического типа системы при прохождении параметрами критического (бифуркационного) значения.

При анализе динамических систем удобно оперировать понятиями параметрического портрета и бифуркационной диаграммы.

Зафиксируем значение вектора параметров $r = r_0$ и рассмотрим максимальное связное множество в пространстве параметров содержащее r_0 и все такие точки, что фазовый портрет динамической системы (1.6) в этих точках топологически эквивалентен фазовому портрету при $r = r_0$. Все такие множества в пространстве параметров R^m образуют параметрический портрет системы (1.6). На гиперповерхностях, разделяющих эти множества, происходят перестройки фазового портрета – бифуркации.

Параметрический портрет вместе с характеристическим фазовыми портретами составляют бифуркационную диаграмму.

Определение 1.9 *Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров индуцированное отношением топологической эквивалентности вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.*

В одномерном случае, для отображения (1.6), единственными случаями, когда линейный анализ (вычисление собственного значения) не дает ответа на вопрос об устойчивости неподвижных точек, являются случаи $f_u(u^*) = \pm 1$. При таких собственных значениях отображение (1.6) является структурно неустойчивым – малое изменение величин параметров либо вида (1.6) приводит к топологически неэквивалентным фазовым портретам; значения параметров, при которых $f_u(u^*) = \pm 1$ являются бифуркационными.

Одним из основных понятий при изучении бифуркаций является понятие нормальной формы. По существу, говоря неформально, системы вида (1.6) гладкими заменами переменных приводятся к наиболее простому полиномиальному виду, а затем те слагаемые, которые не влияют на характер поведения системы, отбрасываются, таким образом получают модельное для многих систем отображение, бифуркационная диаграмма которого легко строится. Полученные результаты исследования таких модельных систем переносятся на исходные динамические системы. Точное определение нормальной формы можно найти в [].

Ограничимся рассмотрением случая, когда система (2.6) зависит от единственного параметра $r \in R$.

Определение 1.10 *Бифуркация положения равновесия для задачи (2.6), при которой $f_u(u^*) = 1$, называется бифуркацией седло-узел (касательной бифуркацией, бифуркацией предельной точки).*

Определение 1.11 *Бифуркация положения равновесия для задачи (1.6), при которой $f_u(u^*) = -1$, называется бифуркацией удвоения периода.*

Смысл названий станет ясен при рассмотрении соответствующих примеров. В системе общего положения (1.6) возможны только эти две бифуркации. Под системой общего положения понимается такая система, которая не подчиняется дополнительным условиям, например, симметрии. Это замечание существенно, так как в системах с симметрией могут происходить другие бифуркации с теми же величинами собственных значений.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, зависящую от параметра

$$u \mapsto a + u + u^2 = f(u, a) \quad (1.10)$$

Эта система имеет неподвижную точку $u^* = 0$ при $a = 0$, причем $f_u(0, 0) = 1$. Множество неподвижных точек – парабола $u - f(u, a) = 0 \Rightarrow a = -u^2$ (рис.1.6). При $a < 0$ существует две неподвижные точки $\pm\sqrt{-a}$, одна устойчивая, другая неустойчивая, при $a > 0$ неподвижные точки отсутствуют. Когда a пересекает нулевое значение при движении от отрицательных к положительным значениям, неподвижные точки сталкиваются и затем исчезают (рис.1.7). Это так называемая бифуркация седло-узел.

Система $u \mapsto a + u - u^2 = f(u, a)$ может быть рассмотрена таким же образом, отличие в том, что при $a > 0$ появляются две неподвижные точки полярного характера.

Для анализа бифуркации седло-узел используется следующая теорема.

Теорема 1.2 Пусть одномерная дискретная динамическая система

$$u \mapsto f(u; a), \quad u \in R, a \in R, f : R \rightarrow R \quad (1.11)$$

имеет при $a = 0$ неподвижную точку $u^* = 0$, и пусть $f_u(0, 0) = 1$. Пусть так же выполнены следующие условия

$$f_{uu}(0, 0) \neq 0, \quad f_a(0, 0) \neq 0. \quad (1.12)$$

Тогда существует гладкая обратимая замена переменных, которая переводит (2.11) в малой окрестности неподвижной точки в систему

$$v \mapsto b + v + sv^2 + o(v^2), \quad (1.13)$$

где $s = \text{sign } f_{uu}(0, 0)$. Кроме того, система (1.13) локально топологически эквивалентна системе $v \mapsto b + v + sv^2$, которая является нормальной формой для бифуркации седло-узел в дискретных динамических системах.

Доказательство можно найти в [29].

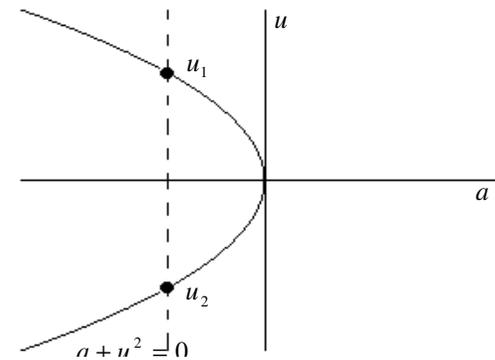


Рис.1.6. Множество неподвижных точек отображения (1.10)

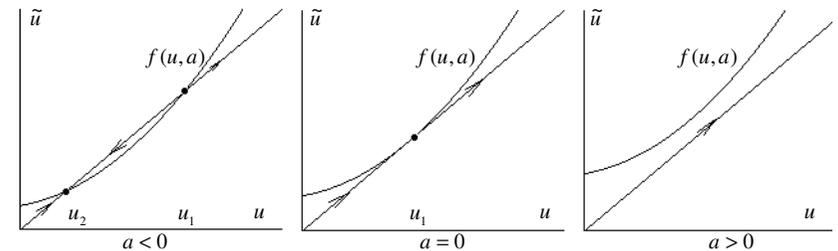


Рис.1.7. Бифуркация седло-узел

Замечания:

1. Условия о том, что неподвижная точка находится в начале координат и бифуркационное значение параметра равняется нулю несущественны. Например, если неподвижная точка $u^* \neq 0$, тогда в (1.11) надо сделать замену $u_t = v_t + u^*$, и для v_t ноль будет положением равновесия с тем же собственным значением, что и для u^* . Таким же образом, заменой $a = b + a_c$, получим бифуркационное значение параметра $b_c = 0$, если бифуркационное значение исходного параметра $a = a_c$.

2. Условия невырожденности (1.12) являются существенными. Например, в примере 1.3, собственное значение нулевой неподвижной точки при $r = 1$ равняется 1. Однако для логистического уравнения теорема 1.2 не выполняется, так как $f_r(0,1) = 0$, и значит нарушено второе условие (1.12). Дело в том, что логистическое уравнение обладает зеркальной симметрией. Проводя замену $u = (1 - r^{-1}) - (1 - 2r^{-1})\tilde{u}$, получим $\tilde{u}_{t+1} = \tilde{r}\tilde{u}_t(1 - \tilde{u}_t)$, где $\tilde{r} = 2 - r$, то есть отображение симметрично относительно $r = 1$.

Рассмотрим следующую одномерную дискретную динамическую систему:

$$u \mapsto -(1+a)u + u^3 = f(u;a) \quad (1.14)$$

Отображение (2.14) обратимо для малых значений $|a|$ в окрестности начала координат. Система (1.14) имеет неподвижную точку $u^* = 0$ для всех значений a с собственным значением $\mu = -(1+a)$. Эта точка устойчива для малых $a < 0$ и неустойчива для $a > 0$. Если $a = 0$, то $\mu = -1$, и линейный анализ недостаточен для изучения

устойчивости. Рассмотрим вторую итерацию $f^2(u;a)$ отображения (1.14)

$$f^2(u;a) = f(f(u;a)) = -(1-a)[-(1+a)u + u^3] + [-(1+a)u + u^3]^3 = (1+a)^2u - [(1+a)(2+2a+a^2)]u^3 + o(u^3)$$

Отображение $f^2(u;a)$, очевидно, имеет тривиальную неподвижную точку $u^* = 0$. Кроме того, оно имеет еще две неподвижные точки для малых $a > 0$: $u_{1,2}^* = \pm\sqrt{a} + o(\sqrt{a})$. В обозначениях исходного отображения f это означает, что $u_2^* = f(u_1^*;a)$, $u_1^* = f(u_2^*;a)$, причем $u_1^* \neq u_2^*$. Эти две точки устойчивы и образуют цикл длины два для исходного отображения $f(u;a)$ (рис.1.8). При значениях параметра a , пересекающего ноль в направлении от положительных значений к отрицательным, цикл уменьшается (в том смысле, что u_1^* и u_2^* стремятся друг к другу) и исчезает. На рис.1.9 горизонтальная ось соответствует устойчивой точке отображения (1.14), в то время как парабола представляет устойчивый цикл длины два, существующий для $a > 0$, когда исходно устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой. Такая бифуркация, при которой устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой с рождением двух других устойчивых неподвижных точек называется бифуркацией типа вилки (название объясняется рисунком) и присуща системам с простой симметрией.

Случай $u \mapsto -(1+a)u - u^3 = f(u;a)$ может быть рассмотрен аналогичным образом. В данном случае рождается неустойчивый цикл длины два для $a < 0$, который исчезает при $a = 0$. По аналогии с бифуркацией Андронова-Хопфа для непрерывных динамических систем данный случай исчезновения неустойчивого цикла

называется “жесткой” бифуркацией удвоения периода, в то время как для системы (1.14) используют термин “мягкая”.

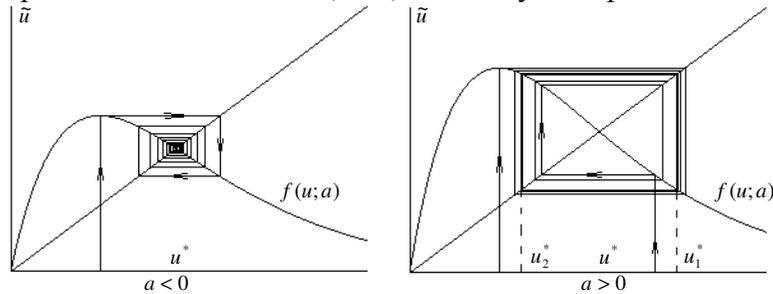


Рис.1.8. “Мягкая” бифуркация удвоения периода (появление устойчивого цикла длины два)

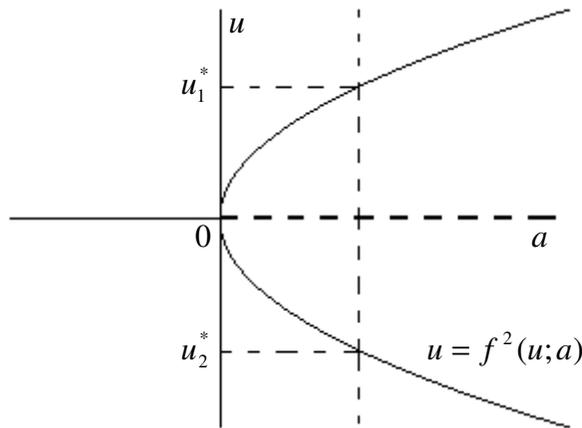


Рис.1.9. Бифуркация типа вилки второй итерации отображения (1.14)

Верна следующая теорема.

Теорема 1.3 Пусть одномерная дискретная система

$$u \mapsto f(u; a), \quad u \in R, \quad a \in R, \quad f : R \rightarrow R \quad (1.15)$$

имеет при $a=0$ неподвижную точку $u^* = 0$, и пусть $f_u(0,0) = -1$. Пусть так же выполнены следующие условия

$$\frac{1}{2}(f_{uu}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{uuu}(0,0) \neq 0, \quad f_{ua}(0,0) \neq 0. \quad (1.16)$$

Тогда существует гладкая обратимая замена переменных, которая переводит (1.15) в малой окрестности неподвижной точки в систему

$$v \mapsto -(1+b)v + sv^3 + o(v^3), \quad (1.17)$$

где $s = \text{sign} \left[\frac{1}{2}(f_{uu}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{uuu}(0,0) \right]$. Кроме того, система (1.17) локально топологически эквивалентна системе $v \mapsto -(1+b)v + sv^3$, которая является нормальной формой для бифуркации удвоения периода в дискретных динамических системах.

Доказательство смотри в [29].

Отметим, что для вычисления величины s иногда удобнее пользоваться эквивалентной формулой, выражающую ее через вторую итерацию отображения:

$$s = \text{sign} \left[-\frac{1}{12} \frac{\partial^3 f^2(u, a)}{\partial u^3} \right].$$

Пример 1.3 (продолжение) Рассмотрим вновь логистическое уравнение (1.7). При $r=3$ собственное значение, вычисленное в неподвижной точке $u_2^* = (r-1)/r$, равно минус одному. Условия (1.16) теоремы 1.3 выполнены, так как $\frac{1}{2}(f_{uu}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{uuu}(0,0) = 2r^2 > 0$, $f_{ua}(0,0) = -1$, поэтому можно утверждать, что в системе (1.7) происходит бифуркация удвоения периода, причем рождается устойчивый цикл периода два (рис.1.7) (бифуркация “мягкая”).

Так как уравнение (1.7) полиномиально, то для него в явном виде можно провести анализ второй итерации. Рассмотрим для уравнения (1.7) вторую итерацию $f^2(u) = f(f(u))$

$$f^2(u) = r^2 u(1-u)[1 - ru(1-u)],$$

которая имеет четыре неподвижные точки $0, (r-1)r^{-1}, (r+1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3})(2r)^{-1}$. Две последние существуют, если $r > 3$. Собственные значения $\frac{df^2(u^*)}{du}$

для них одинаковы и равны $\mu = 4 + 2r - r^2$. То есть они будут линейно устойчивы при $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. Если $r = 1 + \sqrt{6}$, то $\mu = -1$ – снова происходит бифуркация удвоения периода, рождается устойчивый цикл длины четыре (этим и объясняется название бифуркации).

1.4 Периодические решения, хаос

Даже одномерные дискретные динамические системы допускают существование периодических решений. Например, если для некоторого значения параметра производная отображения, вычисленная в неподвижной точке, равна -1 , то при выполнении условий невырожденности (1.16) теоремы 1.3 происходит рождение либо исчезновение цикла длины два.

Определение 1.12 Для дискретной динамической системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in R$, циклом длины k называется последовательность различных точек $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ таких, что $u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k)$.

Каждая из точек $u_i, i = 1, \dots, k$, в силу определения цикла, является неподвижной точкой k -ой итерации отображения $f^k(u) = f(f(\dots f(u)))$. Действительно, для точки u_1 цикла длины k имеем

$$u_1 = f(u_k) = f^2(u_{k-1}) = f^3(u_{k-2}) = \dots = f^k(u_1).$$

Аналогично доказывается, что все остальные точки цикла также являются неподвижными точками отображения f^k . Вопрос об устойчивости цикла, таким образом, сводится к вопросу об устойчивости неподвижных точек отображения f^k , которые составляют цикл длины k .

Чтобы приведенное выше утверждение было корректно, необходимо показать, что величина собственного значения, описывающая устойчивость цикла, не зависит от выбора неподвижной точки. Это действительно так. Необходимо вычислить

$\mu_i = \frac{df^k(u_i)}{du}$, $i = 1, 2, \dots, k$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\mu_i = \frac{df^k(u_i)}{du} = \frac{df(f^{k-1}(u_i))}{du} = f'(u_{i-1}) \frac{df^{k-1}(u_i)}{du} = f'(u_{i-1}) f'(u_{i-2}) \dots f'(u_i)$$

так как $f^{k-1}(u_i) = u_{i-1}$. Таким образом, условие устойчивости цикла длины k принимает вид $|f'(u_1) \dots f'(u_k)| < 1$. При противоположном неравенстве цикл является неустойчивым.

Отметим, что неподвижные точки самого отображения f также являются неподвижными точками отображения f^k . Действительно, если $f(u^*) = u^*$, то $f^2(u^*) = f(f(u^*)) = f(u^*) = u^*$ и т.д. Аналогично

доказывается, что неподвижные точки отображения f^k являются неподвижными точками отображения f^{mk} , где m – целое число.

Если f – гладкая монотонно возрастающая функция, то отображение не может иметь циклов. Действительно, предположим, что такое отображение имеет цикл длины два. Тогда существуют такие u_1 и u_2 , $u_1 \neq u_2$, что $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_1$. Если $u_2 > u_1$, то из монотонности следует, что $f(u_2) = u_1 > f(u_1) = u_2$, что противоречит предположению. Если f – гладкая монотонно убывающая функция, то она может иметь только одну неподвижную точку u^* . Однако четная суперпозиция этого отображения f^{2m} , m – целое положительное число, может иметь новые неподвижные точки, поскольку является монотонно возрастающей функцией. Действительно, так как $f'(u) < 0$, то $(f^{2m}(u))' = \underbrace{f' \circ \dots \circ f'}_{2m} > 0$. Следовательно, в этом случае возможно появление циклов.

В общем случае немонотонные отображения и их различные суперпозиции могут иметь множество неподвижных точек, что приводит к сложной нерегулярной динамике. Вопрос о существовании циклов различной длины в задаче (1.1) изучался в работах [20,21]. Для формулировки основного результата введем упорядочивание всех натуральных чисел:

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow \text{(все нечетные числа, кроме 1)}$$

$$2 \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot 5 \rightarrow 2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow \text{(все нечетные числа, умноженные на 2, кроме 1)}$$

$$2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 5 \rightarrow 2^2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow \text{(все нечетные числа, умноженные на } 2^2, \text{ кроме 1)}$$

$$2^3 \cdot 3 \rightarrow 2^3 \cdot 5 \rightarrow 2^3 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow \text{(все нечетные числа, умноженные на } 2^3, \text{ кроме 1)}$$

...

$$\dots 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Теорема 1.4 (Шарковский [20]) Пусть $f : R \rightarrow R$ – непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k . Тогда f имеет цикл длины t для всех таких t , что $k \rightarrow t$ в указанном выше порядке.

Из этой теоремы следует, что если отображение не имеет циклов длины два, то оно вообще не имеет никаких циклов. Если отображение имеет цикл длиной три, то оно имеет циклы всех возможных длин. Ли и Йорк независимо получили последний результат, который был опубликован в их работе, озаглавленной “период три рождает хаос” []. Один из их результатов состоит в следующем. Рассмотрим непрерывное отображение действительной оси в себя, которое имеет цикл длины три, тогда существуют циклы длины n для всех $n \in N$ и существует несчетное множество непериодических траекторий.

Пример 1.3 (продолжение) Вновь обратимся к уравнению (1.7). Было показано, что при $r_1 = 3$ происходит рождение устойчивого цикла длины два. Кроме того, при $r_2 = 1 + \sqrt{6}$ устойчивый цикл длины два перестает существовать, появляется устойчивый цикл длины четыре. Показать это можно, например, численно. Кроме того, уравнение (1.7) допускает существование циклов и других длин. Покажем, что существует цикл длины три, и,

следовательно, по теореме Шарковского, циклы всех возможных длин.

Чтобы существовал цикл длины три, необходимо, чтобы существовали три неподвижные точки третьей итерации отображения (1.7), такие что $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_1$. Найдем такое значение параметра r , при котором происходит рождение цикла длины три. Для этого необходимо найти решение задачи

$$\begin{cases} \frac{df^3(u;r)}{du} = \mu \\ f^3(u) = u \end{cases} \quad (1.18)$$

где μ – бифуркационное собственное значение ($\mu = \pm 1$). Если положить $\mu = 1$, то решая (1.18), например, методом Ньютона, можно найти три различных решения для u :

$$u_1 \cong 0.16, \quad u_2 \cong 0.51, \quad u_3 \cong 0.96,$$

и одно для $r \cong 3.8284$. Кроме того, можно проверить, что выполняются условия (1.12) теоремы 1.2. Другими словами, при таком значении параметра r для третьей итерации отображения (1.7) происходит бифуркация седло-узел, при которой рождается два цикла длины три отображения (1.7) – устойчивый и неустойчивый. Кривая f^3 при $r \cong 3.8284$ касается биссектрисы первого координатного угла в трех точках, при больших значениях параметра появляется уже восемь точек пересечения.

Пример 1.4 (Уравнение Рикера [37]) Рассмотрим следующую простую популяционную модель:

$$u_{t+1} = ru_t e^{-u_t}, \quad (1.19)$$

где u_t – плотность популяции в момент времени t , $r > 0$ – коэффициент роста. Функция в правой части описывает

отрицательную роль внутривидовой конкуренции при высокой плотности популяции. Дискретная динамическая система (1.19) имеет неподвижную точку $u_1^* = 0$ при всех значениях параметра r . При $r = 1$ появляется нетривиальная неподвижная точка $u_2^* = \ln r$. Собственное значение отображения (1.19) дается выражением $\mu = 1 - \ln r$. Таким образом, u_2^* – устойчива, если $1 < r < r_1$, и неустойчива, если $r > r_1$, где $r_1 = e^2$. При критическом значении параметра $r = r_1$, $\mu = -1$ – происходит бифуркация удвоения периода. Чтобы применить теорему 1.3, необходимо проверить условия невырожденности (1.16). Можно проверить, что

$$\frac{1}{2}(f_{uu}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{uuu}(0,0) = \frac{1}{6} > 0, \quad f_{ua}(0,0) = -\frac{1}{e^2} \neq 0.$$

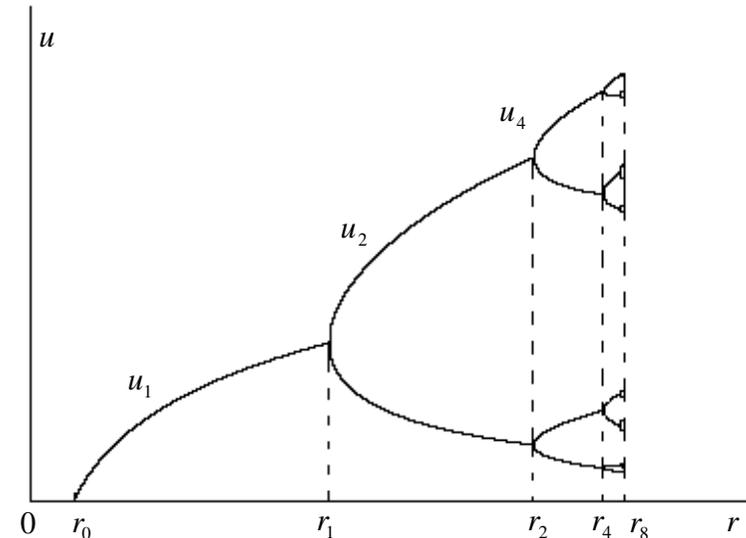


Рис.1.10 Каскад удвоения периода в уравнении Рикера (1.19)

Следовательно в задаче (1.19) появляется устойчивый цикл длины два. Судьба этого цикла может быть прослежена дальше. Численно проверяется, что при $r_2 \cong 12.51$ цикл теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода, рождая устойчивый цикл длины четыре. Следующая бифуркация происходит при $r_4 \cong 14.24$, появляется устойчивый цикл длины восемь, который теряет устойчивость при $r_8 \cong 14.65$ и т.д. (см. рис.1.10, где изображены несколько бифуркаций удвоения периода).

Естественно предположить, что существует бесконечная последовательность бифуркационных значений $r_{2^k}, k = 1, 2, 3, \dots$. Более того, можно проверить, что по крайней мере несколько первых членов этой последовательности напоминают геометрическую прогрессию. На самом деле, отношение

$$\frac{r_{2^k} - r_{2^{k-1}}}{r_{2^{k+1}} - r_{2^k}}$$

стремится (это было обнаружено Гроссманом и Томэ в 1977 [28], а также Фейгенбаумом [26]) к $\mu_F = 4.6692\dots$ при увеличении k . Это явление называется каскадом удвоения периода, число μ_F – постоянной Фейгенбаума, который первым указал на ее универсальность. Наиболее удивительный факт состоит в том, что это число появляется во многих различных процессах, в которых наблюдается каскад удвоений периода. Например, это выполняется для рассмотренного выше логистического уравнения (пример 1.3, рис.1.11). Постоянная Фейгенбаума является такой же характеристикой сценария удвоения периода, как число π для отношения длины окружности к

ее диаметру. Указанная универсальность достаточно неожиданна, но, “по-видимому, более важно то, что она породила надежду на то, что нелинейные явления не лежат за пределами систематизации и научной классификации” [13].

Если в системе наблюдается каскад удвоения периода, интервалы между последующими бифуркационными значениями быстро уменьшаются, сами значения стремятся к некоторому предельному значению r_∞ (объяснение причин этого для некоторого класса одномерных отображений см. [1,29]). При величинах параметра $r > r_\infty$ траектории динамической системы часто называются хаотическими, а каскад удвоений периода – сценарием перехода к хаосу по Фейгенбауму. Отметим, что при использовании термина “хаотический” необходимо быть достаточно аккуратным. Физики при изучении динамических систем используют термин “хаос”, для того, чтобы подчеркнуть чувствительность процесса к малым изменениям начальных условий и расходимость близких траекторий. Математики воздерживаются от формулировки общего определения, хотя в случае одномерных отображений можно быть более точным.

Определение 1.13 Точка u_0 называется аperiodической точкой отображения $f : R \rightarrow R$, если орбита, выходящая из u_0 , ограничена, и если не существует числа $k \in N$ такого, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(u_0)$ существует.

Определение 1.14 Траектория, порожденная аperiodической точкой отображения $f : R \rightarrow R$, называется хаотической.

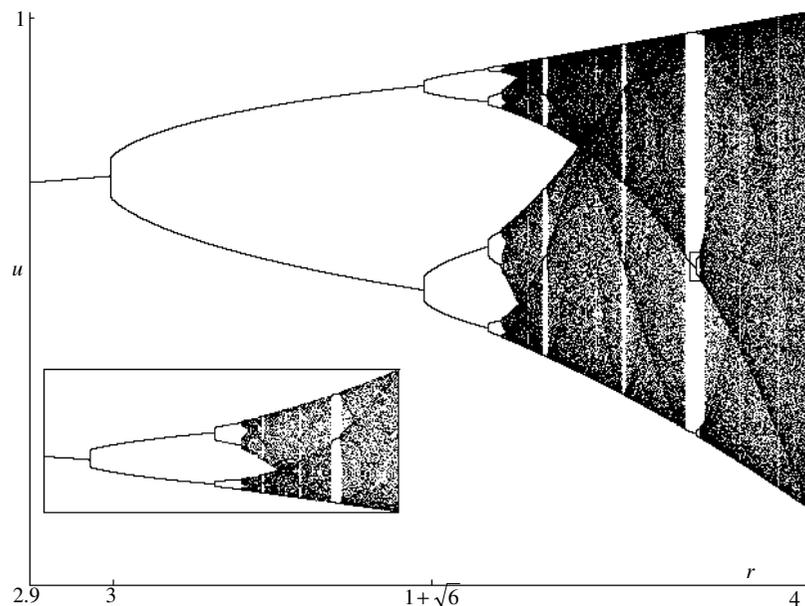


Рис.1.11 Каскад удвоения периода в логистическом уравнении $u_{t+1} = ru_t(1-u_t)$. На вставке показан увеличенный фрагмент диаграммы (масштабы по осям изменены), который показывает свойство самоподобия. Диаграмма получена с помощью компьютерного итерирования логистического уравнения

Предельное значение параметра r_∞ может быть найдено, например, с помощью метода ренормализации [6]. В случае логистического уравнения (1.7) $r_\infty = 3.5699\dots$ На рис.1.11 изображены последовательные бифуркации, происходящие в системе (1.7), которые получены с помощью компьютерного итерирования отображения (1.7). На рис.1.11, в частности, можно видеть, что бифуркационная диаграмма обладает так называемым свойством самоподобия.

Практически полезный способ существования хаотических в смысле определения 1.14 траекторий состоит в следующем. Можно показать (см. [36]), что, если для некоторого u_t и произвольной $f(u_t)$ существует нечетное целое число n , такое что

$$f^n(u_t) < u_t < f(u_t),$$

то существуют циклы нечетной длины, что и означает в конечном итоге существование хаотических траекторий.

1.5 Примеры анализа дискретных динамических систем, заданных качественным образом

Во всех рассмотренных выше примерах подразумевалось, что вид отображения известен точно. Однако, во многих случаях в распоряжении имеется только качественная картина исследуемого отображения. Существенным является то, что иногда удается проанализировать возможное изменение вида отображения при вариации некоторых параметров и получить нетривиальные выводы о динамике исследуемой динамической системы.

Пример 1.5 (Динамика численности жука-вредителя [17,4])

Пусть динамика исследуемой популяции описывается математической моделью (1.1), причем кривая $f(N)$ имеет вид, изображенный на рис.1.12. С помощью графического анализа, изложенного в пункте 1.2, легко устанавливается, что неподвижные точки N_1^* и N_3^* являются устойчивыми, а N_2^* – неустойчивой.

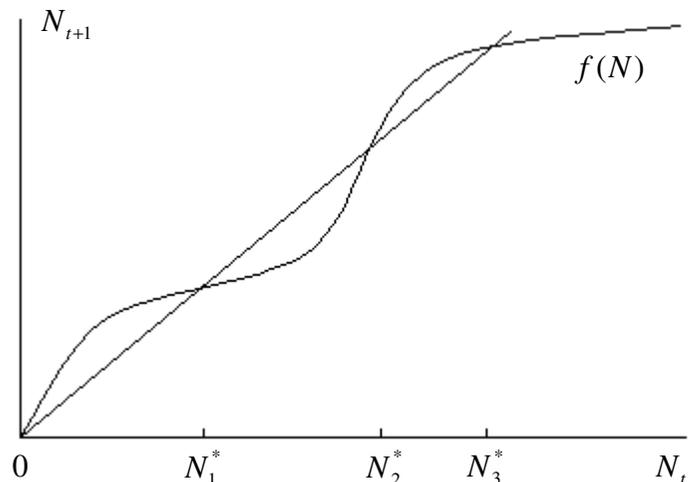


Рис. 1.12 Качественный вид функции $f(N)$ в модели о жуке-вредителе, отражающий существование трех нетривиальных положений равновесия

Участок графика $(0, N_1^*)$ можно считать благоприятным для жизни, поскольку любая популяция, находящаяся на этом участке, будет расти до состояния устойчивого равновесия N_1^* , а затем останется в этом состоянии (с небольшими колебаниями от разных случайных причин). Участок (N_1^*, N_2^*) неблагоприятен, численность популяции убывает, но не до нуля, а до устойчивого равновесия N_2^* . Участок (N_2^*, N_3^*) опять благоприятен и приводит к устойчивому равновесию N_3^* .

Кривая, изображенная на рис.1.12, отражает образ жизни реальной популяции, а именно лесного вредителя черного усача в молодых лесах, или в лесах, расположенных в нижней части склонов, близ границы со степью. В таких лесах усач нападает на слабые или

больные деревья, откладывая в них яйца. (Сильных деревьев он не трогает, потому что они защищаются, заливая яйца смолой.) Равновесие N_1^* означает устойчивую популяцию насекомых в лесу с постоянной долей ослабленных деревьев, служащих им пищей и местом размножения. Здесь имеет место экологическое равновесие между лесом и насекомыми.

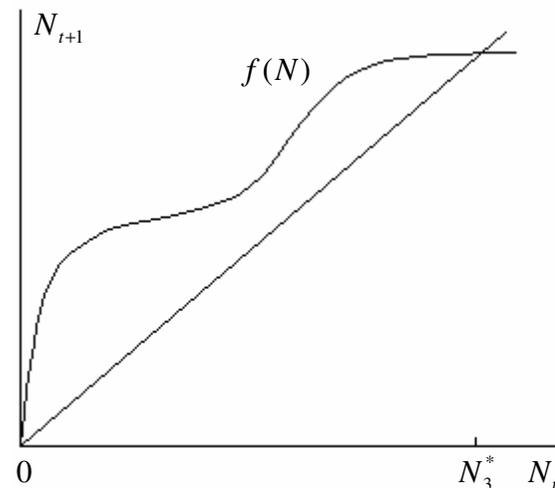


Рис.1.13 Качественный вид функции $f(N)$ в модели о жуке-вредителе в "спелом" лесу

Выше, на склонах гор, условия в лесу меняются, поскольку там прохладнее и больше влаги. Участок (N_2^*, N_3^*) соответствует другому режиму питания, осуществляющемуся в этих условиях: те насекомые-усачи, которым при возросшей плотности популяции не хватает ослабленных деревьев, начинают нападать на здоровые. Этот способ питания, в отличие от описанного выше, уже угрожает самому существованию леса.

Для того, чтобы участок (N_2^*, N_3^*) “использовался” насекомыми, их численность должна достигнуть некоторого минимального уровня – точки N_2^* . В обычных условиях рост популяции на участке (N_1^*, N_2^*) невозможен, так как при начальных численностях, соответствующих этому участку, аттрактором является точка N_1^* , в окрестности которой популяция и остается. Однако, при заносе насекомых извне возникают “ненормальные” условия: численность популяции возрастает; как только число насекомых превысит N_2^* , динамика описывается кривой на участке (N_2^*, N_3^*) . При этом численность популяции возрастает до точки нового устойчивого равновесия N_3^* , возникает явление, которое называется “вспышкой массового размножения”. Отметим, что число насекомых в период вспышки для усача может увеличиться примерно в десять раз, а для других насекомых – в десятки тысяч раз.

Наконец, близ вершин не слишком высоких гор существуют особенно благоприятные условия для леса и, как следствие, для размножения насекомых на поздних стадиях развития леса. В “спелом” лесу, выросшем в этих местах, кривая $f(N)$ имеет вид, отличный от изображенного на рис.1.12. Она получается из прежней подъемом вверх, причем неподвижные точки N_1^* и N_2^* исчезают, а остается только равновесие N_3^* (рис.1.13). Насекомые в этом случае будут размножаться безостановочно до численности N_3^* , и популяционная вспышка становится неизбежной. Как только плотность популяция достигает определенного критического

значения, насекомые начинают нападать на спелый лес, и этот режим питания сохраняется, пока весь спелый лес не погибает. Тогда популяция насекомых начинает спускаться по склону горы, инициируя динамику на участке (N_2^*, N_3^*) , свойственном этой области (рис.1.12). Теперь и в лесу, растущем на склоне, начинается истребляющая его вспышка размножения, скатывающаяся, как волна, сверху вниз. Наконец, вспышка достигает нижней зоны леса, где изменение численности вредителя характеризуется кривой, изображенной на рис.1.14, излишнее число залетевших насекомых вымирает, и вспышка прекращается.

Так как насекомые не трогают молодых деревьев, то после угасания вспышки лес обычно восстанавливается, начиная расти с возраста, привлекающего насекомых. Поэтому на вершинах гор и на склонах со временем вырастает спелый лес, примерно однородный по возрасту,

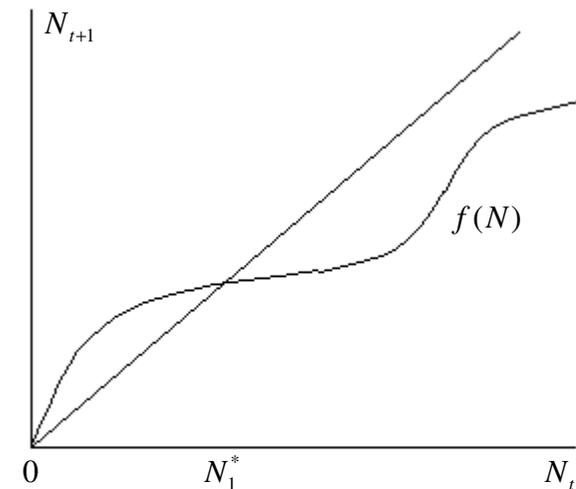


Рис. .14 Качественный вид функции $f(N)$ в модели о жуке-вредителе для нижней зоны леса

и снова начинается вспышка.

Периодическое повторение вспышек действует аналогично лесным пожарам, также опустошающим сразу весь лес, но после пожара лес может вовсе не восстановиться, что после популяционной вспышки встречается реже. В таких случаях горы покрываются травой или лесом другого типа. Вследствие периодических экологических катастроф, в верхней зоне гор не наблюдается “переспелый” лес с участками деревьев разного возраста: на аэрокосмических снимках чаще всего можно увидеть вершины гор, покрытые молодым лесом.

Вмешательство человека может изменить вид кривой $f(N)$, обычно в неблагоприятную сторону. Так, “подъем” кривой, изображенный на рис.1.13, может происходить по причине ослабляющих лес вырубок или промышленных загрязнений воздуха, которые облегчают насекомым использование леса и провоцирует вспышки массового размножения. С другой стороны, человек может также уменьшить вероятность вспышек или вовсе прекратить их, прибегнув к биологическому уничтожению насекомых-вредителей; при этом кривая $f(N)$ может опуститься, как изображено на рис.1.14.

Пример 1.6 (Модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой) Предположим, что имеется точечный источник загрязнения, окруженный некоторой однородной окружающей средой. В начальный момент времени происходит выброс загрязнения в окружающую среду концентрации u_0 . Через фиксированный промежуток времени T концентрация загрязнения уменьшится, так как происходит естественная диссипация загрязнения и, кроме того, окружающая среда поглощает и поглощает загрязнение. Таким образом, мы имеем рекуррентное

уравнение $u_1 = f(u_0, T)$, $u_1 < u_0$, или, для произвольного момента времени, $u_{t+1} = f(u_t, T)$. Данная функциональная зависимость получена экологами экспериментально, и имеет вид, представленный на рис.1.15 [17]. Экологи называют эту зависимость кривой деструкции. Вид кривой деструкции обусловлен тем, что до некоторого значения концентрации загрязнения u_* окружающая среда активно вступает в реакцию с загрязнением, затем происходит насыщение, имеет место пороговый эффект. Величина ϵ обозначает постоянный фон загрязнения, который всегда существует.

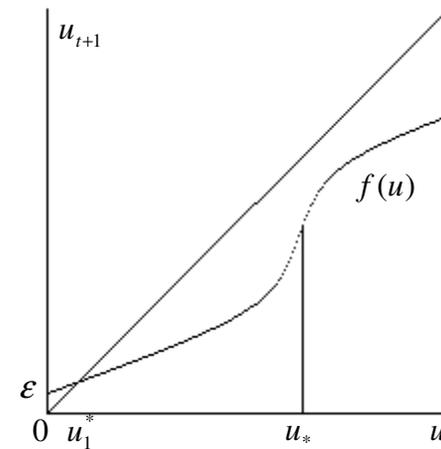


Рис.1.15. Кривая деструкции

Понятно, что вид кривой деструкции сильно зависит от выбранного промежутка времени между измерениями концентраций T . Если взять T очень маленьким, то кривая деструкции будет просто биссектрисой первого координатного угла (сколько выбросили – столько

осталось), если взять T достаточно значительным, то как бы ни была велика начальная концентрация загрязнения, загрязнение после T единиц времени будет мало – кривая деструкции будет стремиться к оси абсцисс. Поэтому величина T выбирается из соображений наглядности, так, чтобы отразить основные качественные черты кривой деструкции. Далее мы не будем указывать явно, что отображение зависит от T .

Прежде чем переходить к математическому анализу модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой, сделаем несколько замечаний. Во-первых, кривая деструкции в общем виде может быть получена экспериментально, например, при чрезвычайно значительных выбросах загрязнения (это может быть, например, ядерный взрыв). Во-вторых, понятно, что наблюдения не ложатся в точности на изображенную на рис.1.15 кривую, образуя некоторое облако значений, окружающее кривую деструкции, которая получается только как аппроксимация измеренных величин. В-третьих, термины “загрязнение” и “окружающая среда” могут быть конкретизированы в каждом конкретном случае по-своему. Например, под загрязнением можно понимать выбросы промышленного предприятия, заболачивание, вырубку лесов и многое другое. Основное требование к “окружающей среде” состоит в том, что она должна быть достаточно однородной во времени, чтобы рассматриваемая модель оказалась применимой. Приведенные замечания необходимы для проверки вопроса применимости предложенной модели (кривой деструкции) к различным экологическим системам.

Кривая деструкции является одномерной дискретной динамической системой, которая имеет

единственную устойчивую неподвижную точку u_1^* , так как из вида кривой следует, что $0 < f'(u_1^*) < 1$. Точнее, u_1^* – глобальный аттрактор рассматриваемой динамической системы, так как любая орбита будет сходиться к этому положению равновесия.

Пусть теперь выбросы загрязнения происходят через равные промежутки времени. Имеет место следующий итеративный процесс. Пусть $f_i(u)$ обозначает зависимость между выброшенной и оставшейся концентрацией загрязнения на i -м шаге. Тогда мы получаем последовательность функций

$$\begin{aligned} f_1(u) &= f(u) \\ f_2(u) &= f(u + f_1(u)) \\ &\dots \\ f_n(u) &= f(u + f_{n-1}(u)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.20)$$

Утверждение 1.2 Пусть кривая деструкции $f(u)$ обладает свойствами:

- 1° $f(u + du) > f(u)$,
- 2° $f'(u) > 0$,
- 3° $f''(u) > 0, u > u_*$, $f''(u) < 0, u < u_*$,
- 4° $f''(u)$ монотонна на промежутке (u_1, u_*) ,

где u_1 определено ниже. Тогда $g(u) = f(u + f(u))$ обладает теми же свойствами для некоторых новых точек \tilde{u}_* и \tilde{u}_1 .

Доказательство. $g(u + du) > g(u)$ из 1°. $g'(u) = f'(u + f(u))(1 + f'(u)) > 0$ из 2°. Рассмотрим

$$g''(u) = f''(u + f(u))(1 + f'(u))^2 + f''(u)f'(u + f(u)).$$

Отсюда, $g''(u_*) < 0$ (напомним, что u_* – точка перегиба функции $f(u)$).

Пусть u_1 – решение уравнения $u + f(u) = u_*$ (в силу 1° такая точка всегда существует, причем $u_1 < u_*$).

Покажем, что $g''(u)$ монотонна на (u_1, u_*) .

Рассмотрим

$$g''(u + du) = f''(u + f(u) + O(du))(1 + f'(u))^2 + f''(u + O(du))f'(u + f(u)) + \varphi(u) + O(du^2)$$

где $\varphi(u) < 0$ при $u \in (u_1, u_*)$. Символом $O(du)$ обозначена величина одного порядка малости с du . Сравнивая полученное выражение с $g''(u)$ можно видеть, что $g''(u + du) < g''(u)$, то есть монотонна. Кроме того $g''(u_1) > 0$. Следовательно, на отрезке (u_1, u_*) $g''(u)$ имеет ровно один корень – функция $g(u)$ имеет единственную точку перегиба $\tilde{u}_* < u_*$.

Приведенное утверждение показывает, что при многократном выбросе зависимость между выброшенной и оставшейся концентрацией загрязнения на i -м шаге качественно эквивалентна кривой деструкции в том смысле, что она имеет единственную точку перегиба.

Утверждение 1.3 При многократном выбросе (1.20) последовательность функций $\{f_i(u)\}$ сдвигается влево нелинейным образом и ограничена верхним пределом.

Доказательство. Так как $f(u)$ монотонно возрастающая и $f(0) = \varepsilon$, то $f_i(u) \geq f_{i-1}(u)$ для любого i .

Для $f(u)$ можно записать ограничение $f(u) \leq au + b$, где $a < 1, b > 0$. Тогда

$$f_1(u) \leq au + b$$

$$f_2(u) \leq a(u + au + b) + b = (au + b)(a + 1)$$

$$f_3(u) \leq a(u + (au + b)(a + 1)) + b = (au + b)(a^2 + a + 1)$$

...

$$f_i(u) \leq a(u + f_{i-1}(u)) + b = (au + b)(a^{i-1} + a^{i-2} + \dots + a + 1).$$

Если $i \rightarrow \infty$, то для $f_i(u)$ получаем оценку (так как $a < 1$):

$$f_i(u) \leq (au + b) \frac{1}{1 - a},$$

что и требовалось доказать.

Утверждения 1.2 и 1.3 позволяют провести исчерпывающий анализ возможных динамических режимов в системе загрязнение – окружающая среда.

Многократный выброс можно рассматривать как одномерное дискретное отображение, зависящее от параметра – количества выбросов. При изменении этого параметра возможны перестройки фазового портрета изучаемой системы – бифуркации. В силу утверждения 1.2 кривая, описывающая многократный выброс имеет только одну точку перегиба, в силу утверждения 1.3 она сдвигается влево, стремясь к некоторому пределу.

Вначале кривая на рис.1.15 будет находиться под биссектрисой, сохраняя единственную устойчивую неподвижную точку. Однако, от итерации к итерации, с увеличением числа выбросов, кривая на рис.1.15 сначала коснется, а затем пересечет биссектрису в двух местах (рис.1.16(a)). В результате этой бифуркации (которая является бифуркацией седло-узел) мы получим три неподвижные точки. Первая, как и ранее, устойчива, и соответствует состоянию устойчивого очищения, вторая – неустойчивая неподвижная точка ($f'(u_2^*) > 1$), третья соответствует устойчивому состоянию, которое назовем

состоянием устойчивого загрязнения. При дальнейшем увеличении числа выбросов кривая многократного выброса под действием нелинейного смещения влево может занять положение, изображенное на рис.1.16(б). В этом случае имеется единственная неподвижная точка, соответствующая состоянию устойчивого загрязнения. Таким образом, процесс взаимодействия загрязнения с окружающей средой можно разбить на три этапа: устойчивое очищение (рис.1.15), бистабильная ситуация (рис.1.16(а)), устойчивое загрязнение (рис.1.16(б)).

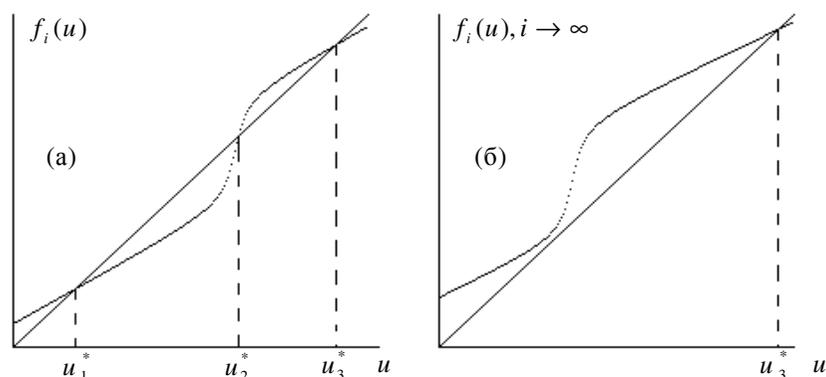


Рис.1.16 Изменение положения функций $\{f_i(u)\}$ при итеративном процессе (1.20)

Важно понимать, что в действительности может быть реализован, например, только один из указанных этапов – состояние устойчивого очищения. Это зависит от конкретного вида кривой деструкции и положения предельной функции многократного выброса, которая может оказаться так же ниже биссектрисы. Существенным в приведенном анализе является то, что модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой в принципе допускает три неэквивалентных сценария

поведения. Кроме того, бистабильная ситуация (которая иногда наблюдается в действительности) указывает на возможные опасные последствия в ближайшем будущем.

1.6 Ляпуновский показатель в одномерном случае

Устойчивость неподвижной точки одномерного отображения определяется с помощью вычисления соответствующего собственного значения. Устойчивость цикла длины k определяется с помощью вычисления собственного значения k -ой итерации отображения. Для характеристики поведения произвольных траекторий вводится понятие показателя Ляпунова.

Определение 1.15 Пусть $f : R \rightarrow R$ – гладкое отображение. Числом Ляпунова траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$l(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|f'(u_1)| |f'(u_2)| \dots |f'(u_n)| \right)^{\frac{1}{n}}$$

если этот предел существует.

Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n}$$

если этот предел существует.

Если существует глобальный аттрактор (который может представлять собой достаточно сложное по своей структуре множество), то значение $h(u_1)$ не зависит от выбора начального значения (за исключением множества

меры ноль), кроме того, показатель Ляпунова не зависит от обратимой замены переменных [6].

Число и показатель Ляпунова характеризуют поведение близких траекторий при изменении дискретной величины t . Например, Ляпуновское число 2 для траектории, начинающейся в точке u_1 , означает, что расстояние между точками траектории, порожденной начальной точкой u_1 и любой траекторией, порожденной любой точкой u близкой к u_1 , будет в среднем увеличиваться вдвое на каждой итерации. Если же это число меньше единицы, то это расстояние будет в среднем уменьшаться на каждой итерации, и траектории, выходящие из u_1 и u становятся бесконечно близкими при большом числе итераций.

Из определения 1.15 следует, что число и показатель Ляпунова не определяются, если u_i такая точка траектории, что $f'(u_i) = 0$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что если l – число Ляпунова для отображения f для траектории, порожденной точкой u_1 , то число Ляпунова траектории, порожденной той же точкой отображения f^m будет равно l^m .

Показатель Ляпунова является легко вычисляемой характеристикой хаотического в смысле определения 1.14 поведения траекторий. Если $h(u)$ положителен, то следовательно близкие траектории разбегаются, в системе наблюдается хаотическое поведение (определение 1.14 можно заменить эквивалентным ему определением: если для ограниченной траектории показатель Ляпунова положителен, то такая траектория называется хаотической).

Зависимость показателя Ляпунова от параметра обычно достаточно сложная. На рис.1.17 представлен пример такой зависимости, полученной численным путем для уравнения (1.7). Значения $h(u)$ определялись по определению (1.15) с $n = 10^5$ для каждой из 600 равномерно расположенных по r точек. Ясно видны относительно широкие интервалы по r с $h(u) < 0$, которые отвечают периодическим движениям с небольшим периодом.

Для движений с большим периодом соответствующие им интервалы по r меньше расстояния между точками на рисунке и поэтому не видны. Полезно сравнить рис.1.17 с рис.1.11, на котором показан каскад удвоения периодов для того же логистического уравнения

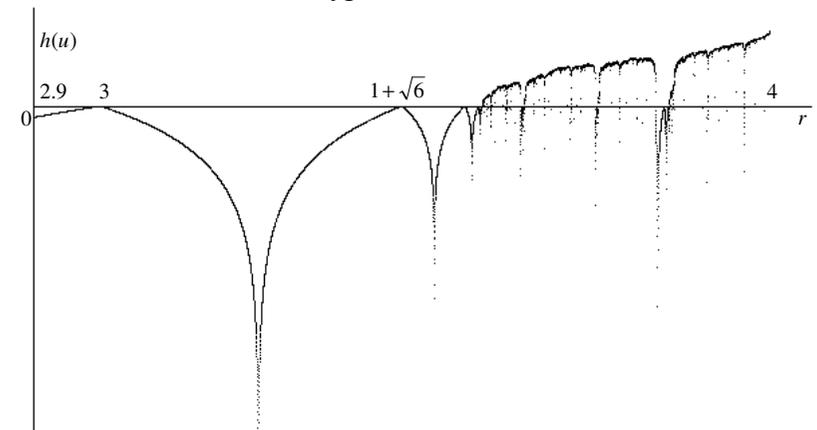


Рис. 1.17 Зависимость показателя Ляпунова от параметра для логистического уравнения (1.7)

Для движений с большим периодом соответствующие им интервалы по r меньше расстояния между точками на рисунке и поэтому не видны. Полезно

сравнить рис.1.17 с рис.1.11, на котором показан каскад удвоения периодов для того же логистического уравнения.

1.7 Некоторые распространенные модели и пояснения

Как отмечалось выше основным объектом, к которому применимы дискретные модели вида (1.1),(1.1'), являются популяции насекомых, для которых характерны неперекрывающиеся популяции, с тех же позиций можно рассматривать популяции некоторых видов рыб [10,15,18,19,27,34,35,39]. Обычно используются следующие типы функциональных зависимостей [9,36]:

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t/K)},$$

$$N_{t+1} = N_t \frac{\lambda}{(1+N_t)^a},$$

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{1+e^{-a(1-N_t/K)}},$$

$$N_{t+1} = \begin{cases} rN_t, N_t < N_S \\ rN_t^{1-b}, N_t > N_S \end{cases}.$$

Указанные модели имеют похожие свойства, правые части приведенных уравнений имеют вид, представленный на рис.1.1. Начало координат в каждой из моделей – неподвижная точка, кроме того, все они имеют единственный максимум, поэтому возможно существование только одной нетривиальной неподвижной точки.

Траектории дискретных систем, описываемых функциями $f(N)$, качественный вид которых изображен на рис.1.1, всегда ограничены после достаточно

продолжительного времени некоторым максимумом N_{max} и минимумом N_{min} : несколько первых итераций могут находиться ниже N_{min} , если начальное условие N_0 достаточно мало. Значения N_{max} и N_{min} находятся из условий:

$$N_{max} = f(N_m), \text{ где } N_m - \text{решение уравнения } \frac{df(N)}{dN} = 0,$$

$$N_{min} = f(N_{max}) = f(f(N_m)) = f^2(N_m).$$

Например, для первой из приведенных в этом пункте моделей:

$$f'(N) = 0 \Rightarrow N_m = \frac{K}{r},$$

$$N_{max} = f(N_m) = \frac{K}{r} e^{r-1},$$

$$N_{min} = f^2(N_m) = \frac{K}{r} e^{2r-1-e^{r-1}}$$

Если кривая $f(N)$ достаточно быстро убывает после $N = N_m$, то возникает возможность резкого уменьшения численности популяции до величины $N = N_{min}$. В данном случае может возникнуть вопрос о вымирании популяции. Если популяция уменьшается до размеров $N_t < 1$, очевидно, вид вымирает. На самом деле, вымирание практически неизбежно, если N_t резко уменьшается до малых значений. Простейшее условие вымирания популяции в терминах введенных величин N_{min} :

$$N_{min} = f^2(N_m) \leq 1.$$

В рассмотренном примере, если, скажем, $r = 3.5$ и если $K < 1600$, то популяции в обязательно вымрет.

1.8 Эффект Олли и его моделирование

Можно выделить важную группу математических моделей, входящих в общий класс моделей вида (1.1), поведение которых обладает так называемым эффектом Олли. Биологические популяции, которые проявляют этот эффект, вымирают, если общая численность популяции опускается ниже некоторого порогового значения N_c . Типичная форма функциональной зависимости $f(N)$ отображения (1.1), учитывающего эффект Олли, приведена на рис.1.18. Если начальная численность популяции N_0 такова, что $f^2(N_0) < N_c$, то $N_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Такие популяционные модели обычно возникают в результате воздействия хищников.

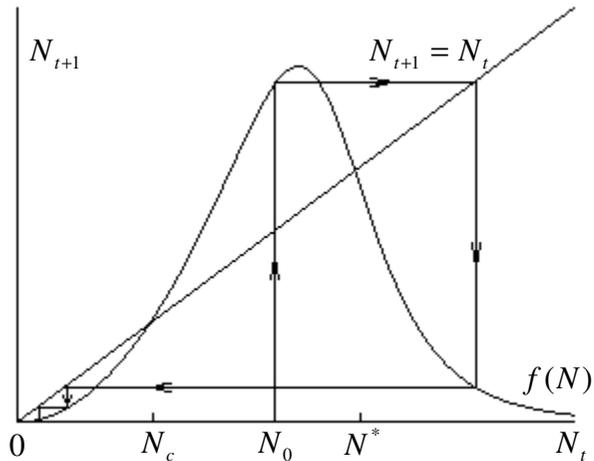


Рис. 1.18 Вид кривой $f(N)$ в популяционной модели, учитывающая эффект Олли

Пример 1.7 Предположим, что численность некоторой популяции, подверженной определенному воздействию хищников, моделируется следующим разностным уравнением:

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{aN_t^2}{b^2 + N_t^2}, \quad a > 0.$$

Всегда существует неподвижная точка $N_0^* = 0$. Кроме того, если $a^2 > 4b^2$ существуют еще две неотрицательные неподвижные точки $N_{1,2}^* = (a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$ (рис.1.19). Устойчивость неподвижных точек определяется величиной соответствующего собственного значения:

$$\frac{df(N)}{dN} = \frac{2ab^2u}{(b^2 + u^2)^2},$$

$$\frac{df(N_{1,2}^*)}{dN} = \frac{4b^2}{a(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})}.$$

Анализируя полученное выражение для собственных значений и учитывая, что $a^2 > 4b^2$, можно видеть, что $0 < f'(N_1^*) < 1$ – всегда устойчивая неподвижная точка, $1 < f'(N_2^*)$ – неустойчивая неподвижная точка.

Таким образом, в рассматриваемой модели существует нижняя численность $N_c = (a - \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$. Если для некоторого целого m и начального условия N_0 будет выполнено соотношение $f^m(N_0) < N_c$, то популяция необратимо вымирает.

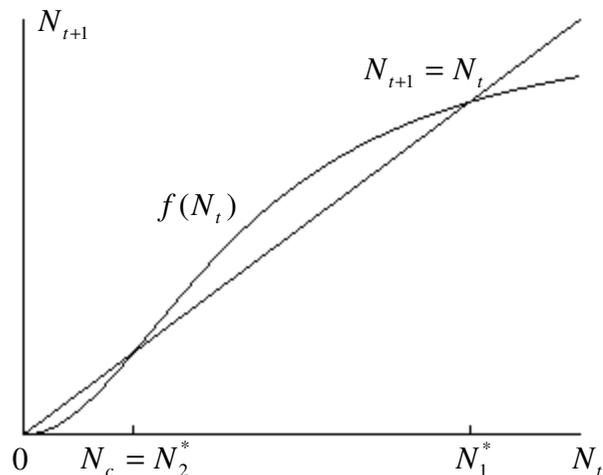


Рис. 1.19 Иллюстрация эффекта Олли, описываемого уравнением примера 1.7

Отметим, что в примере 1.7 невозможно существование периодических решений, так как для $N > 0$ $f(N)$ является монотонно возрастающей функцией. Однако, в общем виде, модели, обладающие эффектом Олли, показывают в некотором роде более богатое поведение, чем модели, рассмотренные в пункте 1.7, так как наряду с колебательным и хаотическим поведением учитывают возможность вымирания популяции, если для некоторого целого m m -ая итерация отображения удовлетворяет условию $f^m(N_t) < N_c$.

1.9 Дискретные модели с запаздыванием

Реальной областью применения моделей вида (1.1) являются ситуации, когда в динамике изучаемого объекта существуют определенные регулярные этапы. Например, жизненные циклы многих биологических видов имеют ясно выраженную периодичность, как правило приуроченную к сезонной периодичности климата. Примерами являются многие виды насекомых, у которых каждая популяция представляет собой один возрастной класс, и смежные поколения не перекрываются. Это обусловлено тем, что за время развития очередного поколения все предыдущее поколение успевает вымереть до начала следующего периода размножения. Кроме того, некоторые биологические виды имеют четко выделенный период размножения, так что каждая популяция представляет собой совокупность дискретных непересекающихся возрастных классов. Во многих случаях численность каждого из них определяется только численностями предшествующих возрастных классов. Примерами являются некоторые виды рыб (лососи и др.), у которых смена поколений происходит через правильные промежутки времени [27,36]. В этом случае модель (1.1) необходимо модифицировать, так как численность популяции зависит не от общей численности популяции, а от численности непересекающихся возрастных классов, и мы приходим к дискретным моделям с учетом эффекта запаздывания:

$$N_{t+1} = f(N_t, N_{t-1}, N_{t-2}, \dots, N_{t-T}), \quad (1.21)$$

где T – целое положительное число, $T \geq 1$.

Пример 1.8 Например, модель, используемая Международной комиссией по охране китов (IWC) [36], представляет собой частный случай отображения (1.21):

$$N_{t+1} = (1 - \mu)N_t + R(N_{t-T}),$$

здесь N_t – численность взрослых китов, $(1 - \mu)N_t$, $0 < \mu < 1$ – часть китов, которые будут живы и годом позже, $R(N_{t-T})$ – прибавление ко взрослой популяции части китов, рожденных T годами раньше, T – время взросления новорожденного кита, обычно порядка 5–10 лет. Главный вопрос в рассматриваемой модели – выбор адекватной реальности функции $R(N)$.

Как и ранее, первый вопрос о возможных решениях модели (1.21) состоит в нахождении неподвижных точек и исследовании их устойчивости.

Неподвижными точками уравнения (1.21) будут в общем случае решения нелинейного уравнения

$$N^* = f(N^*, N^*, \dots, N^*) = f(N^*).$$

Для исследования устойчивости неподвижной точки N^* положим

$$N_t = N^* + dN_t, \quad N_{t-1} = N^* + dN_{t-1}, \dots, \quad N_{t-T} = N^* + dN_{t-T}, \quad N_{t+1} = N^* + dN_{t+1}$$

Тогда, рассуждая аналогично тому, как это было при доказательстве утверждения 1.1, получим

$$dN_{t+1} = \frac{\partial f(N^*)}{\partial N_t} dN_t + \frac{\partial f(N^*)}{\partial N_{t-1}} dN_{t-1} + \dots + \frac{\partial f(N^*)}{\partial N_{t-T}} dN_{t-T} + o(dN) \quad (1.22)$$

где $dN = (dN_t^2 + dN_{t-1}^2 + \dots + dN_{t-T}^2)^{1/2}$. Обозначим

$$\frac{\partial f(N^*)}{\partial N_{t-i}} = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, T. \quad \text{Тогда, с точность до членов}$$

порядка $o(dN)$, получим конечно-разностное линейное однородное уравнение в форме (1.3):

$$dN_{t+1} - \sum_{i=0}^T a_i dN_{t-i} = 0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде $dN_t = \sum_{i=1}^{T+1} C_i p_i^t$, где C_i – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями, а p_i – корни характеристического уравнения $T+1$ степени:

$$p^T - \sum_{i=0}^T a_i p^{T-i} = 0,$$

которое имеет ровно $T+1$ корней (комплексно сопряженных и действительных).

Неподвижная точка N^* будет асимптотически устойчивой (аттрактором), если $dN_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, для этого необходимо, чтобы

$$\left| \sum_{i=1}^{T+1} C_i p_i^t \right| \rightarrow 0,$$

или, другими словами, все корни характеристического уравнения удовлетворяли условию $|p_i| < 1$.

Возможен случай, когда dN_t не стремится к нулю, однако выполнено соотношение $|dN_t| \leq R$, $R > 0$ для любых t . Тогда относительно неподвижной точки N^* возникают колебания с амплитудой, не превосходящей величину R .

Пример 1.9 Пусть численность (в рассматриваемом случае относительная, т.е. действительная численность деленная на максимально возможную для данной

экологической системы) популяции определяется соотношением

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t)}, \quad r > 0 \quad (1.23)$$

Неподвижные точки этого отображения удовлетворяют уравнению $(1 - e^{r(1-N^*)})N^* = 0$, т.е. $N_1^* = 0$, $N_2^* = 1$. Для первой неподвижной точки уравнение (1.22) принимает вид $dN_{t+1} = dN_t e^r + o(dN)$. Отсюда следует, что в линейном приближении $dN_{t+1} / dN_t = e^r > 1$ при $r > 0$. Следовательно, неподвижная точка N_1^* неустойчива при всех значениях параметра.

Для $N_2^* = 1$ линейная часть соотношения (1.22) имеет вид

$$dN_{t+1} - dN_t + rdN_{t-1} = 0$$

Полагая $dN_t = p^t$, получим квадратное уравнение $p^2 - p + r = 0$, которое имеет решения:

$$p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-4r})/2, \quad r \leq \frac{1}{4},$$

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm i\Theta}, \quad \rho = \sqrt{r}, \quad \Theta = \arctg \sqrt{4r-1}, \quad r > \frac{1}{4}.$$

Общее решение уравнения (1.22) выражается формулой $dN_t = C_1 p_1^t + C_2 p_2^t$. Если $0 < r < 1/4$, тогда оба корня характеристического уравнения действительны и по абсолютной величине меньше единицы. Следовательно, в этом случае $dN_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, неподвижная точка N_2^* является аттрактором. Если $r > 1/4$, то $p_{1,2}$ – комплексно сопряженные, причем $p_1 p_2 = |p_1|^2 = \rho^2 = r$.

Следовательно, если $1/4 < r < 1$, то $|p_1| < 1$, $|p_2| < 1$ – неподвижная точка остается устойчивой. Тогда

$$dN_t = \rho'(C_1 \cos(\Theta t) + C_2 \sin(\Theta t)) = \rho' C \cos(\Theta t + \varphi),$$

где C, φ – новые постоянные, зависящие от C_1 и C_2 .

Если $r \rightarrow 1$, то $\Theta \rightarrow \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. При этом

$$dN_t \approx C \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \varphi\right),$$

то есть возникают колебания с периодом 6. При $r > 1$ неподвижная точка N_2^* становится линейно неустойчивой, однако система продолжает оставаться в окрестности этой неподвижной – возникает колебательное поведение. На рис.1.20 приведены траектории системы (1.23) при $r > 1$.

Следует понимать, что в системе (1.23) не существует в точности периодических траекторий периода 6, однако, если изобразить поведение орбит (1.23) на плоскости (N_t, N_{t+1}) , то можно видеть, что на этой плоскости существует некоторая кривая, к которой стремятся траектории (1.23) при $r = 1 + dr$, где $dr > 0$ достаточно мало. Причем фазовая траектория обходит эту кривую приблизительно за шесть итераций. Появление такой кривой при изменении параметра называется бифуркацией Неймарка-Сакера, которая будет подробно рассмотрена в главе 3.

В заключение отметим, что задачи вида (1.21) по сути не одномерны, так как их можно записать в виде системы уравнений. Например, для задачи (1.23), вводя новую переменную $N_t = Q_{t+1}$, получим систему разностных уравнений второго порядка:

$$Q_{t+1} = N_t, \quad N_{t+1} = N_t e^{r(1-Q_t)},$$

которая есть частный случай n -мерной системы общего вида

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad N_t \in R^n, \quad f: R^n \rightarrow R^n.$$

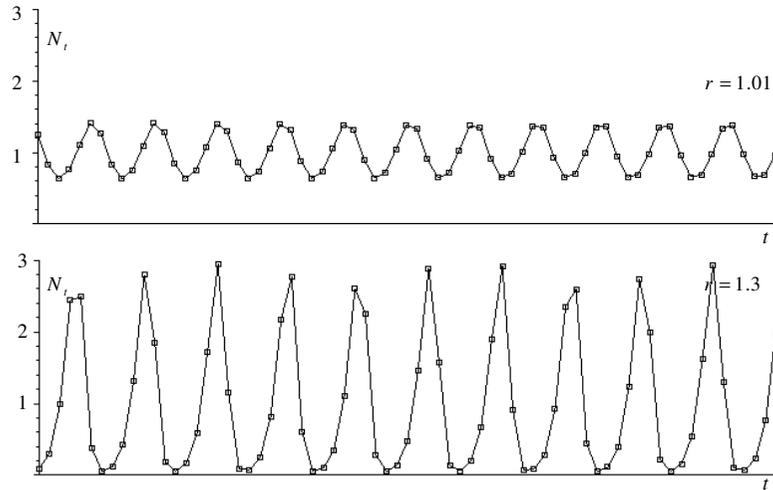


Рис.1.20 Решения разностного уравнения с запаздыванием (1.23) для различных значений параметра.

1.10 Упражнения

1. В следующих динамических системах с дискретным временем найти неотрицательные положения равновесия, их устойчивость и найти первые бифуркационные значения параметров (величины всех параметров неотрицательны)

$$N_{t+1} = N_t \left[1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right]$$

$$i. \quad N_{t+1} = \begin{cases} rN_t, & N_t < K \\ rN_t^{1-b}, & N_t > K \end{cases}$$

$$ii. \quad N_{t+1} = \frac{rN_t}{(1 + aN_t)^b}$$

$$iii. \quad N_{t+1} = \frac{(1+r)N_t}{1 + rN_t}$$

$$iv. \quad N_{t+1} = \frac{rN_t}{(1 + aN_t)^b}$$

Определить, где возможно, максимальное и минимальное значение N_t и обсудить глобальное поведение решений. Все приведенные в этом задании отображения использовались в качестве математических моделей реальной популяции.

2. (Контроль численности популяции) Для контроля численности насекомых была предложена стратегия внесения извне стерильных насекомых в общую популяцию, причем численность стерильных насекомых поддерживается на постоянном уровне. Одна из математических моделей, описывающих получающуюся в результате популяционную динамику, имеет следующий вид:

$$N_{t+1} = \frac{RN_t^2}{\frac{(R-1)}{M} N_t^2 + N_t + S}$$

где $R > 0$, $M > 0$ – параметры задачи, S – постоянная популяция стерильных насекомых.

Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость. Изучить возможные бифуркации. Найти критическое значение численности стерильных насекомых S_c , такое, что если $S > S_c$, то популяция подавляется. Определить возможное поведение решений, если $0 < S < S_c$.

3. Рассмотреть уравнение с запаздыванием

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{1 + bN_{t-1}^2}, r > 1$$

Найти положительную неподвижную точку и исследовать ее устойчивость. Показать, что при некотором значении параметра R положение равновесия бифурцирует в колебательное решение, период которого близок к шести.

4. (Логистическое уравнение) Используем метод Ньютона для нахождения корней систем уравнений, численно найти значение параметра r логистического уравнения (1.7) при котором происходит рождение цикла периода три. (Указание: записать третью итерацию уравнения (1.7) с условием бифуркации седло-узел как систему четырех уравнений с четырьмя неизными (u_1, u_2, u_3, r)). Проверить, что бифуркация седло-узел для третьей итерации отображения (1.17) удовлетворяет условиям (1.12).

5. Доказать, что первое из условий вырожденности бифуркации удвоения периода (1.16) эквивалентно выражению $-f_{uuu}^2(0,0)/12$.

6. (Уравнение Рикера) Для уравнения Рикера (1.19) с помощью метода Ньютона проверить, что бифуркация удвоения периода происходит при приведенном значении параметра r_2 . Построить бифуркационную диаграмму (см. рис.1.11), на которой бы изображались притягивающие множества системы в зависимости от параметра r . Указание : для каждого конкретного значения параметра задать произвольное следующие 10-100 итераций. Построить зависимость показателя Ляпунова от величины параметра. Сравнить полученные изображения, используя один и тот же масштаб.

7. (Доказательство теоремы 1.2) Доказать, что существует гладкая обратимая замена переменных, приводящая

систему (1.11) к виду (1.13). При доказательстве выполнить следующие шаги:

i. разложить $f(u,a)$ в ряд Тейлора по u в точке $u=0$ и воспользоваться условиями существования неподвижной точки и бифуркации седло-узел. Получить выражение $f(u,a) = f_0(a) + (1+g(a))u + f_2(a)u^2 + O(u^3)$

Чему равно $g(0)$?

ii. провести замену переменных $\xi = u + \delta$, где $\delta(a)$ будет определено позднее. В новых переменных получить $\xi^- = (f_0(a) - g(a)\delta + f_2(a)\delta^2 + O(\delta^3)) + \xi + (g(a) - 2f_2(a)\delta + O(\delta^2))\xi + (f_2(a) + O(\delta))\xi^2 + O(\xi^3)$

iii. Определить условие существования (локального) гладкой функции $\delta(a)$, такой, что параметрозависимый линейный член исчезает. (Рассмотреть коэффициент при ξ в виде функции $F(a, \delta) = 0$ и проверить условия выполнения теоремы о неявной функции). Получить вид искомого функции: $\delta(a) = g'(0)a/2f_2(0) + O(a^2)$.

iv. Подставить полученное выражение вместо $\delta(a)$ и ввести новый параметр μ , зависящий от a . Найти, воспользовавшись теоремой об обратной функции, условия разрешимости уравнения $\mu = \mu(a)$ в виде $a = a(\mu)$. Результат проделанных замен записать в виде $\xi^- = \mu + \xi + \phi(\mu)\xi^2 + O(\xi^3)$ Чему равно $\phi(0)$?

v. С помощью некоторой замены переменных привести полученное выражение к виду

8. (Модель динамики популяций натурального планктона «ротиферы») Анализ модели был проведен Каревым и Березовской.

Для моделирования динамики популяции одной из разновидностей зоопланктона была предложена феноменологическая модель, основанная на временных рядах:

$$N_{t+1} = N_t \exp,$$

где $a, b > 0$, c – параметры задачи. Параметры b , c характеризуют вид зоопланктона, a – отражает роль окружающей среды, в частности, может быть использован для описания влияния токсинов, с ростом a популяция должна деградировать.

Провести полное исследование модели:

- i. масштабной заменой переменных уменьшить число параметров на единицу
- ii. определить возможное количество неотрицательных неподвижных точек в зависимости от значений параметров
- iii. исследовать устойчивость неподвижных точек
- iv. в пространстве параметров найти линию бифуркаций удвоения периода и проверить условия невырожденности
- v. построить численно линию в пространстве параметров, на которой происходит рождение цикла три
- vi. построить параметрический портрет динамической системы и привести примеры возможных решений для каждой области параметрического портрета.

Для некоторых видов зоопланктона были получены оценки значений параметров, которые приведены в следующей таблице:

вид	a	b	c
Filinia pejleri	0.367	0.092	-0.031
B. angularis	1.687	3.538	-0.799
Monostilla bulla	1.865	1.422	-0.109
B. rotundiformis	1.552	0.44	0.011
B. budapestinensis	1.925	3.533	0.789
B. lyratus	1.425	1.12	0.095
B. dichotomus	1.359	1.344	0.225
Asplancha girodi	0.305	0.081	0.001
Keratella tropica	0.547	0.511	0.05

Для каждого из видов найти точку в пространстве параметров и описать динамику. Описать для каждого из видов поведение численности популяции (характер вымирания) при увеличении параметра a (уровня токсичности).

9. Доказать следующее утверждение. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкое отображение, и u^* – неподвижная точка этого отображения. Если $f'_u(u^*) < 0$ и $f(u) < u$ для всех $u > u^*$, то любая орбита $u, f(u), f^2(u), \dots$, где $u > u^*$, имеет по крайней мере одну точку меньшую чем u^* , т.е. $f^k(u) < u^*$ для некоторого k . Если, кроме того, $f(u) < u$ для всех $u > u^*$, то любая орбита $u, f(u), f^2(u), \dots$, имеет по крайней мере одну точку, большую чем u^* , т.е. $f^k(u) > u$ для некоторого номера k . (Доказательство этого утверждения показывает, что если в системе наблюдается каскад удвоения периода, и, кроме того, неустойчивая неподвижная точка u^* стремится к нулю, то траектория бесконечное число раз попадает в промежуток $(0, u^*)$. Если динамическая система является математической моделью популяции динамики, то это означает, что такой хаотический режим приводит к неизбежному вымиранию популяции).

2

Многомерные динамические системы с дискретным временем и их применение

Достаточно распространенной задачей биоматематики является построение математических моделей, описывающих численность либо плотность взаимосвязанных популяций, каждая из которых характеризуется неперекрывающимися последовательными поколениями. В данном случае подходящим математическим аппаратом являются многомерные динамические системы с дискретным временем в форме:

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad N_t \in R^n, f : R^n \rightarrow R^n, \quad (2.1)$$

где $N_t = (N_t^1, N_t^2, \dots, N_t^n)$ – вектор, описывающий численность популяций в момент времени t , $f(N)$ – вектор-функция, обычно также зависящая от ряда параметров.

Пусть, например, имеется два взаимодействующих вида, численность которых обозначим через N_t и P_t . Тогда их динамика будет определяться системой разностных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} &= g(N_t, P_t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $N_t, P_t \in R$, $f, g : R^2 \rightarrow R$.

Существуют три основных типа взаимодействия:

конкуренция, симбиоз и взаимодействие типа хищник-жертва. В ситуации хищник-жертва скорость роста одного из видов увеличивается за счет другого, при конкуренции скорости роста обоих видов уменьшаются, при симбиозе – увеличиваются. Задача (2.2) является частным случаем общей системы (2.1).

Принимая во внимание сложность поведения некоторых решений одномерных дискретных моделей, рассмотренных в главе 2, не удивительно, что даже более сложное поведение возможно в многомерных системах вида (2.1). Во многих случаях невозможно получить более или менее полноценного аналитического исследования возможных режимов поведения траекторий системы (2.1), однако даже частное знание, полученное с помощью качественных методов (которые, несмотря на свою “качественность”, являются строгими) оказывается чрезвычайно полезно.

Системы вида (2.1) иногда будем записывать в эквивалентной форме

$$N \mapsto f(N), \quad N \in R^n, f : R^n \rightarrow R^n. \quad (2.1')$$

2.1 Линейные динамические системы с дискретным временем

Одним из немногих классов многомерных динамических систем, допускающих полное исследование, являются линейные системы. Область применения линейных моделей ограничена, тем не менее такие модели могут использоваться при описании, например, динамики системы на ранних стадиях развития. Кроме того, линейные системы являются необходимым этапом при

исследовании локального поведения сложной системы в окрестности заданной точки (“линеаризация”).

Линейная динамическая система с дискретным временем с n переменными задается системой уравнений n -го порядка

$$u_{t+1} = Au_t \quad (2.3)$$

где $u_t \in R^n$ – вектор размерности n , A – постоянная матрица $n \times n$, t – момент времени, $t = 0, 1, 2, \dots$.

Исследование систем вида (2.3) сводится к исследованию свойств матрицы A .

Если u_0 – начальное состояние системы, то $u_1 = Au_0$, $u_2 = Au_1 = A^2u_0, \dots$, $u_t = A^t u_0$ при всех t .

Решение системы (2.3) полностью определяется собственными числами и собственными векторами матрицы A . Ограничимся случаем, когда матрица A не имеет кратных собственных чисел. Заметим, что отсутствие кратных собственных чисел является случаем “общего положения”: если матрица A имеет кратные собственные числа, то малым изменением ее коэффициентов можно добиться того, что все собственные значения будут иметь кратность один. Если учесть, что реальные значения коэффициентов матрицы A , описывающие смертность, выживание и т.п., измеряются приближенно, то можно заключить, что случай матрицы с кратными собственными значениями в линейной модели (2.3) имеет смысл рассматривать, только если система зависит от параметров. Итак, пусть все собственные значения матрицы A различны. Чтобы найти их, нужно решить характеристическое уравнение

$$\det(A - \mu E) = 0, \quad (2.4)$$

где E – единичная матрица n -го порядка.

Утверждение 2.1 Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – корни характеристического уравнения (2.4), а v_1, v_2, \dots, v_n – соответствующие собственные векторы, так что $Av_i = \mu_i v_i$ при всех i . Тогда общее решение системы (2.3) записывается в виде

$$u_t = \sum_{i=1}^n C_i \mu_i^t v_i, \quad (2.5)$$

где C_k – произвольные постоянные.

Доказательство. Любой начальный вектор u_0 может быть представлен в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы A , то есть $u_0 = C_1 v_1 + \dots + C_n v_n$. Умножая обе части равенства на матрицу A^t , получим (2.5).

Формула (2.5) позволяет оценить асимптотику решения системы (2.3) при $t \rightarrow \infty$. Из этой формулы следует, что асимптотическое поведение определяется величиной (по модулю) собственных чисел матрицы A . В частности, если для всех собственных чисел матрицы A выполняется условие $|\mu_i| < 1$, то $u_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если же существует такое собственное число, что $|\mu_i| > 1$, то $u_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. (Это же утверждение остается верным и в случае существования кратных собственных чисел, а доказательство опирается на приведение матрицы A к Жордановой нормальной форме). В некоторых важных случаях существенно только максимальное собственное число, и тогда $u_t \approx \mu_{max}^t v_{max}$, где v_{max} – собственный вектор, отвечающий максимальному собственному числу μ_{max} .

Дальнейшее исследование проведем на примере

одной важной модели из математической биологии.

2.2 Динамика возрастного состава популяции.

Модель Лесли

Рассматривается некоторая популяция. Предположим, что все особи данной популяции разбиты на n возрастных групп, так что u_t^k равно численности k -ой возрастной группы в момент времени t , $k=1, 2, \dots, n$. При моделировании динамики возрастного состава популяции примем во внимание процессы рождения, гибели и перехода особей из каждой возрастной группы в следующую.

Предполагается, что первая возрастная группа u_t^1 включает в себя потомков всех возрастных групп, появившихся в промежутке времени $(t-1, t)$; количество потомков от особей каждой возрастной группы пропорционально численности этой группы; особи последней возрастной группы более никуда не переходят; количество особей, выживающих в интервале времени $(t, t+1)$ в каждой возрастной группе, пропорционально численности этой группы, и все выжившие особи в момент $t+1$ переходят в следующую возрастную группу.

Формализация этих предположений приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u_{t+1}^1 &= b_1 u_t^1 + b_2 u_t^2 + \dots + b_n u_t^n \\ u_{t+1}^2 &= a_1 u_t^1 \\ &\dots \\ u_{t+1}^n &= a_{n-1} u_t^{n-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь b_k – интенсивность размножения k -ой возрастной

группы, a_k – коэффициент выживаемости при переходе из k -ой в $k+1$ -ю возрастную группу. По своему смыслу все коэффициенты a_k, b_k неотрицательны и, кроме того, $a_k \leq 1$.

Система (2.6) называется моделью Лесли динамики возрастного состава [30,31] популяции. Она может быть записана в виде линейной системы

$$u_{t+1} = Au_t,$$

где $u_t = (u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^n)$ и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент рождаемости b_n в последней возрастной группе отличен от нуля (в противном случае система распадается на две подсистемы, точнее, первые $n-1$ групп не зависят от последней группы). Предположим также, что все $a_k > 0$ (в противном случае система также распадается). Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$\mu^n - b_1 \mu^{n-1} - b_2 a_1 \mu^{n-2} - \dots - b_n a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 0. \quad (2.7)$$

В силу сделанных предположений свободный член этого уравнения отличен от нуля, поэтому среди корней нет нулевых.

Определение 2.1 Матрица называется неотрицательной, если все ее элементы –

неотрицательные действительные числа, и положительной, если все ее элементы – строго положительные числа.

Теорема 2.1 (Фробениус) Среди всех собственных чисел неотрицательной матрицы существует неотрицательное собственное число μ , такое, что для всех других собственных чисел выполняется неравенство $\mu \geq |\mu_k|$.

Применяя теорему Фробениуса к матрице A и учитывая, что нулевых собственных чисел матрица A не имеет, заключаем, что матрица A имеет хотя бы одно строго положительное собственное число μ_{max} такое, что $\mu_{max} \geq |\mu_k|$.

Далее воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2.2 (Декарт). Число положительных корней многочлена равно числу перемен знака в последовательности его коэффициентов либо на четное число меньше.

В многочлене (2.7) существует лишь одна переменная знака коэффициентов, поэтому уравнение (2.7) имеет не более одного положительного корня. Следовательно матрица A имеет ровно одно строго положительное собственное число. Будем считать, что максимальным собственным числом является $\mu_{max} = \mu_1$. Записав решение модели Лесли в виде

$$u_t = C_1(\mu_1)^t \left(v_1 + \sum_{k=2}^n C_k \left(\frac{\mu_k}{\mu_1} \right)^t v_k \right)$$

получаем, что при достаточно больших t

$$u_t \approx C_1(\mu_1)^t v_1. \quad (2.8)$$

Предельная возрастная структура популяции определяется компонентами собственного вектора v_1 , соответствующего максимальному собственному числу μ_1 . Действительно, относительная численность k -ой возрастной группы, равная по определению

$$p_t^k = \frac{u_t^k}{\sum_{i=1}^n u_t^i},$$

асимптотически равна

$$p_t^k \approx \frac{v_1^k}{\sum_{i=1}^n v_1^i}, \quad (2.9)$$

где v_1^k – компоненты собственного вектора v_1 , которые находятся из системы уравнений

$$(A - \mu_1 E)v_1 = 0, \quad (2.10)$$

или, в скалярной форме,

$$(b_1 - \mu_1)v_1^1 + b_2v_1^2 + \dots + b_nv_1^n = 0$$

$$a_1v_1^1 - \mu_1v_1^2 = 0$$

$$a_2v_1^2 - \mu_1v_1^3 = 0$$

$$a_3v_1^3 - \mu_1v_1^4 = 0$$

...

$$a_{n-1}v_1^{n-1} - \mu_1v_1^n = 0$$

Решение системы (2.10) определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому можно положить $v_1^1 = 1$, и тогда вектор v_1 равен

$$v_1 = \left(1, \frac{a_1}{\mu_1}, \frac{a_1 a_2}{(\mu_1)^2}, \frac{a_1 a_2 a_3}{(\mu_1)^3}, \dots, \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{(\mu_1)^{n-1}} \right).$$

Отсюда с помощью соотношения (2.10) получаем точный вид асимптотического возрастного состава популяции.

Из формулы (2.8) вытекает важный качественный вывод: популяция неограниченно растет, если $\mu_{max} > 1$ и вымирает, если $\mu_{max} < 1$; если $\mu_{max} = 1$ численность популяции стремится к конечной величине.

Отыскание величины μ_{max} может быть технически сложной задачей. Однако выяснить, будет ли μ_{max} больше или меньше одного, можно весьма просто. Разделим характеристическое уравнение (2.7) на μ^n и обозначим $\xi = 1/\mu$. Тогда для ξ получаем уравнение

$$P(\xi) = b_1 \xi + b_2 a_1 \xi^2 + \dots + b_n a_1 a_2 \dots a_{n-1} \xi^n = 1. \quad (2.11)$$

Полином $P(\xi)$ является монотонно возрастающей функцией при $\xi > 0$, так как все его коэффициенты неотрицательны. Поэтому действительный корень уравнения (2.11) будет больше единицы тогда и только тогда, когда $P(1) < 1$; это значит, что $\mu_{max} < 1$ тогда и только тогда, когда $P(1) < 1$. Аналогично, действительный корень уравнения (2.11) будет меньше единицы, когда $P(1) > 1$, и, следовательно, $\mu_{max} > 1$ тогда и только тогда, когда $P(1) > 1$. Если же $P(1) = 1$, то популяция стремится к стационарной численности и стационарному возрастному составу.

2.3 Некоторые определения и обобщения

Многие определения, данные в главе 2, естественным образом переносятся на многомерные динамические системы с дискретным временем вида

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad N_t \in R^n, \quad f: R^n \rightarrow R^n. \quad (2.1)$$

Определение 2.2 Множество всевозможных состояний N_t называется пространством состояний (или фазовым пространством) системы (2.1).

В рассматриваемом случае пространство состояний (2.1) является подмножеством евклидова пространства R^n . Для моделей биологических систем естественно ограничиться только неотрицательными значениями компонент вектора N_t .

Определение 2.3 Последовательность точек N_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ называется траекторией (или орбитой) системы (2.1), порожденной отображением f .

Определение 2.4 Неподвижными точками системы (2.1) называются такие точки пространства состояний N^* , что $f(N^*) = N^*$.

Системы вида (2.1) могут допускать существование периодических решений.

Определение 2.5 Для дискретной динамической системы (2.1) циклом длины k называется последовательность различных точек N_1, N_2, \dots, N_k таких, что $N_2 = f(N_1), \dots, N_k = f(N_{k-1}), N_1 = f(N_k)$.

Как и для одномерных систем показывается, что каждая из точек цикла является неподвижной точкой k -ой итерации отображения f :

$$N_i = f^k(N_i) = f(\underbrace{f(\dots f(N_i)\dots)}_k), \quad i = 1, \dots, k.$$

Неподвижные точки и циклы являются примерами траекторий динамической системы (2.1). Характер этих траекторий определяет во многом асимптотическое поведение всех остальных траекторий.

Определение 2.6 *Фазовым портретом динамической системы (2.1) называется разбиение пространства состояний на траектории.*

Для определения характера ключевых траекторий динамической системы введем

Определение 2.7 *Положительным инвариантным множеством динамической системы (2.1) называется подмножество $S \subset R^n$, такое, что для любого $N_0 \in S$ выполняется $f^t(N_0) \in S$ для всех $t > 0$.*

В дальнейшем слово “положительное” обычно будет опускаться.

Определение 2.7 значит, что $f^t(S) \subset S$ для всех $t > 0$. Инвариантное множество S состоит из всех положительных полутраекторий. Любая отдельная полутраектория является инвариантным множеством. Положения равновесия (неподвижные точки) и циклы являются простейшими замкнутыми инвариантными множествами. Другим примером инвариантных множеств являются инвариантные многообразия, которые являются конечномерными гиперповерхностями в некотором пространстве R^k . Например, это может быть тор в R^3 .

Одним из основных открытий в теории динамических систем является тот факт, что очень простые, обратимые, дифференцируемые динамические системы могут иметь исключительно сложные замкнутые

инвариантные множества, состоящие из бесконечного числа периодических и непериодических орбит.

С точки зрения математического моделирования реальных систем основной интерес представляют устойчивые инвариантные множества, поскольку только они и могут наблюдаться на практике.

Определение 2.8 *Инвариантное множество S_0 называется устойчивым, если*

(1) *для любой достаточно малой окрестности $U \supset S_0$ существует окрестность $V \supset S_0$, такая что $f^t(N) \in U$ для всех $N \in V$ и $t > 0$.*

(2) *существует окрестность $U_0 \supset S_0$ такая, что $f^t(N) \rightarrow S_0$ для всех $N \in U_0$ при $t \rightarrow \infty$.*

Если S_0 – положение равновесия или цикл, это определение превращается в стандартное определение устойчивости положения равновесий или цикла. Свойство (1) называется устойчивостью по Ляпунову (именно оно и было сформулировано в определении 2.5). Свойство (2) обычно называется асимптотической устойчивостью. Асимптотически устойчивое замкнутое инвариантное множество часто называют аттрактором динамической системы.

Если N^* – неподвижная точка динамической системы (2.1), то тогда достаточные условия ее устойчивости могут быть сформулированы в терминах матрицы Якоби, вычисленной в неподвижной точке N^* .

Теорема 2.2 *Рассмотрим дискретную динамическую систему*

$$u \mapsto f(u), \quad u \in R^n,$$

где f – гладкое отображение. Предположим, что оно имеет неподвижную точку u^* : $f(u^*) = u^*$. Обозначим матрицу Якоби $f(u)$, вычисленную в точке u^* , как $A = f_u(u^*)$. Тогда неподвижная точка u^* устойчива (асимптотически), если все собственные значения μ_1, \dots, μ_n матрицы A удовлетворяют условию $|\mu_i| < 1$.

Напомним, что матрицей Якоби вектор-функции $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u))$, вычисленной в точке $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ называется матрица

$$A = f_u(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n(u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n(u)}{\partial u_n} \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 2.2 существенным образом опирается на теорему Гробмана-Хартмана для отображений [1], которую можно сформулировать следующим образом: в окрестности неподвижной точки N^* , такой, что матрица Якоби отображения (2.1), вычисленная в этой неподвижной точке, не содержит собственных чисел по модулю равных единице, дискретная динамическая система (2.1) локально топологически эквивалентна (см. определение 2.7) линеаризованной динамической системе $N_{t+1} = AN_t$, где A – соответствующая матрица Якоби. Применяя утверждение

2.1 и теорему Гробмана-Хартмана получаем доказательство теоремы 2.2.

Поскольку случай, когда среди собственных чисел матрицы Якоби, вычисленной в неподвижной точке, нет таких собственных значений, что $|\mu_i| = 1$ является важным, введем следующее

Определение 2.9 Пусть u^* – неподвижная точка обратимого в окрестности u^* отображения $u \mapsto f(u)$. Тогда точка u^* называется гиперболической, если среди собственных значений матрицы Якоби $f_u(u^*)$ отсутствуют собственные значения по модулю равные единице.

Теорема 2.2 может быть применена и для исследования устойчивости цикла. Устойчивость цикла длины k определяется собственными значениями матрицы Якоби k -ой итерации отображения (2.1). Используя цепное правило дифференцирования, можно показать, что

$$f_N^k(N_1) = f_N(N_1)f_N(N_2)\dots f_N(N_k).$$

2.4 Гиперболические неподвижные точки дискретных динамических систем

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$u \mapsto f(u), \quad u \in R^n, \quad f: R^n \rightarrow R^n, \quad (2.12)$$

где отображение f предполагается гладким (дифференцируемым) вместе с обратным отображением f^{-1} . Пусть $u^* = 0$ – неподвижная точка системы (2.12) (то есть $f(u^*) = u^*$), и пусть A – матрица Якоби отображения

(2.12), вычисленная в точке u^* . Собственные значения $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ матрицы A иногда называют мультипликаторами неподвижной точки. Отметим, что не существует нулевых мультипликаторов, так как f предполагается обратимым. Пусть n_-, n_0, n_+ – число мультипликаторов u^* лежащих внутри, на и снаружи единичной окружности $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$ соответственно.

Определение 2.9 *Неподвижная точка отображения (2.12) называется гиперболической, если $n_0 = 0$.*

Определение 2.10 *Гиперболическая неподвижная точка называется седловой (или гиперболическим седлом), если $n_+ n_- \neq 0$.*

Отметим, что гиперболичность является типичным свойством. Другими словами, случай, когда один или несколько мультипликаторов лежат на единичной окружности, не является случаем общего положения – малое изменение системы (2.12) приводит к исчезновению таких мультипликаторов. Негиперболические неподвижные точки естественно рассматривать только в том случае, если система (2.12) зависит от параметров (то есть рассматривается не единственная система (2.12), а некоторое семейство дискретных динамических систем).

Введем понятие двух инвариантных множества для неподвижной точки u^* :

$$W^s(u^*) = \{u : f^k(u) \rightarrow u^*, k \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(u^*) = \{u : f^k(u) \rightarrow u^*, k \rightarrow -\infty\}.$$

Определение 2.11 *Множество $W^s(u^*)$ называется устойчивым множеством (многообразием) неподвижной*

точки u^ . Множество $W^u(u^*)$ называется неустойчивым множеством (многообразием) неподвижной точки u^* .*

Далее мы можем сформулировать две теоремы, которые дают топологическую классификацию неподвижных точек дискретных динамических систем.

Теорема 2.3 *Пусть u^* гиперболическая неподвижная точка отображения (2.12). Тогда пересечение $W^s(u^*)$ и $W^u(u^*)$ с достаточно малой окрестностью u^* содержит гладкие подмногообразия $W_{loc}^s(u^*)$ и $W_{loc}^u(u^*)$ размерности n_- и n_+ соответственно. Более того, $W_{loc}^s(u^*)$ ($W_{loc}^u(u^*)$) касательны в точке u^* многообразиям $T^s(T^u)$, где $T^s(T^u)$ – пространства, соответствующие объединению всех собственных значений матрицы A с $|\mu| < 1$ ($|\mu| > 1$).*

Теорема 2.4 *Две гиперболические неподвижные точки отображения (2.12) локально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же число мультипликаторов внутри и снаружи единичной окружности, и знак произведений всех мультипликаторов с $|\mu| < 1$ и $|\mu| > 1$ тот же самый для обеих неподвижных точек.*

Доказательство теоремы 2.3 можно найти в [25]. Доказательство теоремы 2.4 опирается на теорему Гробмана-Хартмана и построение гомеоморфизма для двух линейных динамических систем с одинаковым числом мультипликаторов внутри и снаружи единичной окружности.

Пример 2.1 *Рассмотрим неподвижную точку одномерной дискретной системы. Пусть $n_- = 1$,*

рассматриваемое положение равновесия устойчиво, более того, по теореме 2.3, все траектории, стартующие в малой окрестности этой неподвижной точки, стремятся к ней. В зависимости от знака мультипликатора имеется две возможности, которые представлены на рис.2.2 и 2.3 и на фазовом портрете (рис.2.4). В первом случае отображение сохраняет ориентацию в R , во втором случае изменяет на противоположную. Эти две неподвижные точки топологически неэквивалентны.

Пример 2.2 Предположим, что u^* – неподвижная точка двумерной дискретной динамической системы ($n = 2$). Предположим, что $n_- = n_+ = 1$. Следовательно, по теореме 2.3, существует два инвариантных многообразия, проходящих через неподвижную точку, а именно, одномерное многообразие $W^s(u^*)$, образованное всеми траекториями, стремящимися к u^* при отображении f и одномерное многообразие $W^u(u^*)$, образованное всеми траекториями, стремящимися к u^* при отображении f^{-1} . Все орбиты, не принадлежащие двум указанным многообразиям, проходят рядом с неподвижной точкой и в конце концов покидают ее окрестность в обоих направлениях времени.

Рис.2.1 показывает два возможных типа седловых точек в R^2 . В случае (а) положительных мультипликаторов $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ траектория, стартующая в точке на $W^s(u^*)$ сходится к u^* монотонно. Таким образом, устойчивое многообразие $W^s(u^*)$ представляет собой объединение двух инвариантных ветвей $W_{1,2}^s(u^*)$, разделенных точкой u^* . То же самое может быть сказано о $W^u(u^*)$, заменяя

отображение f его обратным. Если мультипликаторы отрицательны (случай (б) рис.2.1, $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$, траектории на многообразиях “прыгают” между двумя компонентами $W_{1,2}^{s,u}(u^*)$, разделенными неподвижной точкой. Отметим, что ветви $W_{1,2}^{s,u}(u^*)$ инвариантны по отношению ко второй итерации отображения f^2 .

Устойчивое и неустойчивое многообразия $W^{s,u}(u^*)$ являются примерами инвариантных кривых – если u принадлежит такой кривой, то любая итерация отображения $f^k(u)$ также принадлежит этой кривой. Инвариантная кривая не является траекторией, она состоит из бесконечного числа траекторий.

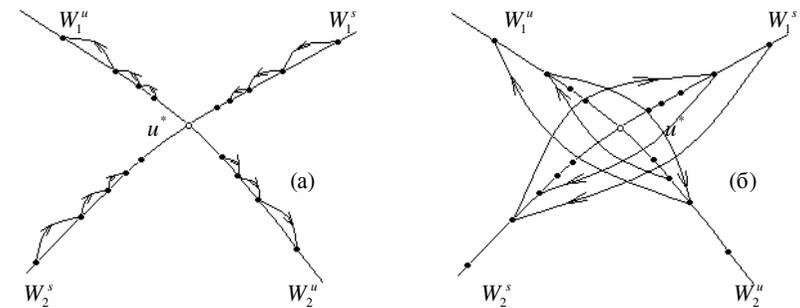


Рис.2.1 Примеры седловых точек дискретных динамических систем на плоскости. (а) – случай положительных мультипликаторов, (б) – отрицательных мультипликаторов

Глобальное поведение устойчивого и неустойчивого многообразий $W^{s,u}(u^*)$ может быть чрезвычайно сложным. Пусть снова мы рассматриваем планарный случай, и пусть u^* – неподвижная точка седлового типа с положительными мультипликаторами. $W^s(u^*)$ и $W^u(u^*)$ могут пересекаться

под ненулевым углом (транскверсально). Более того, единственная точка пересечения влечет за собой бесконечное число таких пересечений.

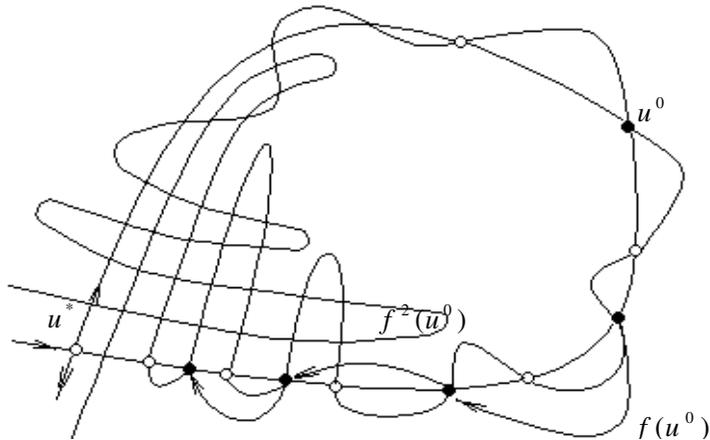


Рис.2.2 Гомоклиническая структура Пуанкаре

В самом деле, пусть u^0 – точка пересечения $W^s(u^*)$ и $W^u(u^*)$. По определению, она принадлежит обеим инвариантным кривым. Поэтому, траектория, начинающаяся в этой точке, сходится к седловой точке u^* : $f^k(u^0) \rightarrow u^*$, $k \rightarrow \pm\infty$. Каждая точка такой траектории – точка пересечения $W^s(u^*)$ и $W^u(u^*)$. Бесконечное число пересечений заставляет многообразие “осциллировать” сложным образом около u^* (рис.2.2). Получающаяся в результате “сеть” называется гомоклинической структурой Пуанкаре. Траектория, выходящая из u^0 , называется гомоклинической к u^* . Динамические последствия появления гомоклинической структуры также драматичны: в результате появляется бесконечное число периодических орбит произвольных периодов около гомоклинической орбиты.

2.5 Различные типы бифуркаций. Коразмерность бифуркаций

В главе 2 было показано, что в различных динамических системах могут происходить одни и те же бифуркации. Естественно возникает вопрос о классификации возможных бифуркаций. Одной из характеристик является так называемая коразмерность бифуркации.

Бифуркация – это изменение топологической структуры фазового портрета динамической системы при малом изменении параметров системы. Бифуркационным значением параметров или точкой бифуркации называется такое значение параметров, при котором динамическая система является структурно неустойчивой – малое шевеление параметров приводит к качественно различным картинам поведения. Следовательно, бифуркации происходят, когда неподвижная точка не является гиперболической.

В n -мерной динамической системе с дискретным временем есть n мультипликаторов. Бифуркации можно классифицировать по тому, для скольких из них нарушается условие гиперболичности $|\mu_i| = 1$. Исходя из этого, можно поставить вопрос о том, сколько параметров должно быть в модели для того, чтобы данная бифуркация была типичной. Собственные значения (мультипликаторы) можно рассматривать как функции от параметров. Тогда условие нарушения гиперболичности можно рассматривать как систему уравнений относительно вектора параметров:

$$\begin{aligned} |\mu_1(r_1, r_2, \dots, r_k)| &= 1 \\ |\mu_2(r_1, r_2, \dots, r_k)| &= 1 \\ &\dots \\ |\mu_m(r_1, r_2, \dots, r_k)| &= 1 \end{aligned}$$

где r_1, r_2, \dots, r_k – параметры системы, $m \leq n$.

В общем случае (наиболее типичном), если необходимо удовлетворить m условиям, то потенциальные точки бифуркации будут располагаться на $(k - m)$ -мерной поверхности. Величину m называют коразмерностью бифуркации. Таким образом, коразмерность бифуркации показывает, от скольких параметров должна зависеть динамическая система, чтобы бифуркация была для нее типичной. Чем выше коразмерность, тем более экзотической будет бифуркация. Отметим еще раз, что существенно не количество параметров, а количество условий.

В главе 1 были рассмотрены бифуркации седло-узел и удвоения периода (также упоминалась бифуркация типа вилки). Условия, накладываемые на эти бифуркации, выглядят $\mu_1 = 1$ и $\mu_1 = -1$ соответственно, поэтому коразмерность данных бифуркаций равна единице. Если рассматривать собственные значения как функции параметров, то для выполнения этих условий достаточно всего одного параметра (одно уравнение с одной неизвестной). Если система, в которой происходят эти бифуркации, зависит, например, от двух параметров, то точки бифуркации будут располагаться на $(2 - 1)$ -мерной поверхности – кривой в пространстве параметров.

Заметим, что коразмерность не является исчерпывающей характеристикой, так как для одной и той же коразмерности возможны различные типы бифуркаций.

Далее, для анализа бифуркаций седло-узел и удвоения периода достаточно исследовать одномерные системы, хотя, разумеется, эти бифуркации могут происходить и в системах большей размерности, однако их существенные черты остаются неизменными. Вообще, всегда исследование различных типов бифуркаций проводят в пространствах наименьшей возможной размерности.

В динамических системах с дискретным временем возможен еще один тип бифуркации коразмерности один. Для этого необходимо, чтобы два комплексно сопряженных мультипликатора находились на единичной окружности $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$. Соответствующее условие выглядит $|\mu_{1,2}| = 1$. Эта бифуркация может происходить в системах, размерность которых больше или равна двум. Данная бифуркация носит название Неймарка-Сакера.

2.6 Бифуркация Неймарка-Сакера. Рождение замкнутой инвариантной кривой

Рассмотрим следующую динамическую систему с дискретным временем:

$$u \mapsto f(u; a), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (2.13)$$

которая для малых значений $|a|$ имеет неподвижную точку $u = (0, 0)$ с собственными значениями $\mu_{1,2} = \rho(a)e^{\pm i\theta(a)}$,

$\rho(0) = 1$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$, то есть при бифуркационном значении параметра мультипликаторы расположены на единичной окружности $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$.

Определение 2.12 Бифуркация положения равновесия для динамической системы (2.12) (и ее частного случая (2.13)) при которой собственные значения равны $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ называется бифуркацией Неймарка-Сакера (или бифуркацией Хопфа для отображений).

При прохождении параметром критического значения в типичной ситуации возможны два варианта поведения траекторий системы, реализация которых зависит от характера устойчивости (нелинейной) неподвижной точки $u = (0, 0)$ при критическом значении параметра.

Пусть, например, начало координат устойчиво нелинейным образом при $a = 0$, устойчиво при $a < 0$ и неустойчиво, если $a > 0$. В этом случае происходит рождение в малой окрестности начала координат замкнутой инвариантной кривой при прохождении параметром нуля, причем эта замкнутая инвариантная кривая устойчива (так называемая “мягкая” или суперкритическая бифуркация Неймарка-Сакера, рис.2.3).

Если же начало координат неустойчиво при $a = 0$, устойчиво при $a < 0$ и неустойчиво, если $a > 0$ (отличие типа устойчивости только при критическом значении параметра), то реализуется второй вариант, при котором замкнутая инвариантная кривая появляется в малой окрестности неподвижной точки при $a < 0$, причем эта замкнутая инвариантная кривая неустойчива (“жесткая” или субкритическая бифуркация Неймарка-Сакера, рис. 2.4).

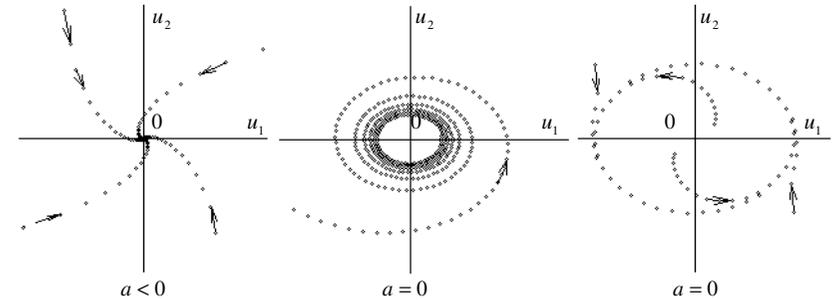


Рис. 2.3 “Мягкая” бифуркация Неймарка-Сакера

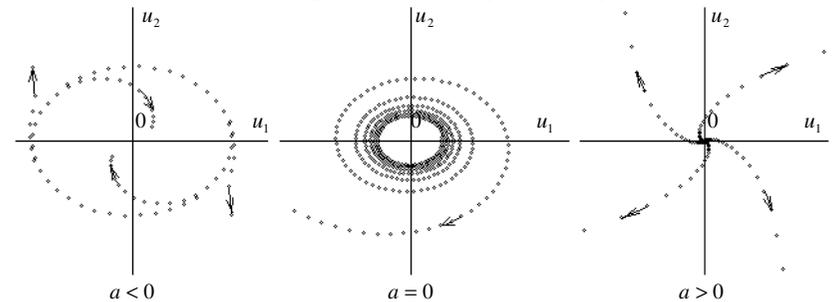


Рис. 2.4 “Жесткая” бифуркация Неймарка-Сакера

Поясним названия двух типов бифуркации Неймарка-Сакера. Предположим реализуется первый вариант (“мягкая” бифуркация Неймарка-Сакера), и неподвижная точка (скажем, точка стационарного сосуществования двух популяций) устойчива. Пусть бифуркационный параметр под воздействием каких-либо внешних условий начинает меняться и устойчивое ранее положение равновесия становится неустойчивым. Если в системе реализуются условия бифуркации Неймарка-Сакера, то в окрестности положения равновесия появляется устойчивая инвариантная кривая – несмотря на то, что неподвижная точка неустойчива, численность популяций продолжают оставаться в ее окрестности, и какое-либо

случайное воздействие не влияет на их асимптотическое поведение. Гораздо хуже ситуация оказывается в случае, если реализуется “жесткая” бифуркация Неймарка-Сакера. Даже если линейный анализ показывает устойчивость неподвижной точки, внешнее воздействие или малое изменение условий существования может привести к тому, что точка в пространстве состояний окажется за пределами (снаружи) неустойчивой инвариантной кривой и покинет окрестность неподвижной точки.

Замкнутая инвариантная кривая не является траекторией. Ее структура зависит от того, рационально ли отношение величины поворота на каждой итерации и 2π . Если отношение рационально, все орбиты на кривой периодичны. В случае иррационального отношения (которое обычно и реализуется) периодических траекторий нет, все траектории плотно заполняют кривую.

Анализ бифуркации Неймарка-Сакера основывается на следующей теореме.

Теорема 2.5 *Предположим, что двумерная динамическая система с дискретным временем (2.13) имеет для малых значений параметра $|a|$ неподвижную точку $u = (0, 0)$ с собственными значениями (мультипликаторами) $\mu_{1,2} = \rho(a)e^{\pm i\theta(a)}$, $\rho(0) = 1$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$. Пусть выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} \rho'(0) &\neq 0, \\ e^{ik\theta_0} &\neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда существует окрестность неподвижной точки, в которой рождается единственная замкнутая инвариантная кривая при прохождении параметром нуля.

Устойчивость инвариантной кривой определяется некоторым коэффициентом l_1 , который зависит от вида правых частей системы (2.13).

Замечания.

1. Доказательство теоремы 2.5 достаточно сложно и может быть найдено, например, в [9], [29].

2. Условия невырожденности (2.14), которые используются для доказательства теоремы 2.5, существенны и не могут считаться техническими. При невыполнении одного из приведенных во второй строке условий возможно как отсутствие инвариантной кривой так и появление нескольких кривых.

3. По существу, должно быть выполнено еще одно условие невырожденности – $l_1 \neq 0$.

4. Тип бифуркации на практике может быть определен с помощью компьютерного моделирования, например, при критическом значении параметра. Однако во многих случаях можно применить и точные формулы, к которым мы сейчас и перейдем.

Для вычисления величины l_1 необходимо привести системы (2.13) к одному комплексному отображению.

Во-первых, в силу сделанных предположений, систему (2.13) можно записать в следующем виде:

$$u \mapsto A(a)u + F(u; a), \quad (2.15)$$

где F – вектор-функция, чьи компоненты имеют разложение в ряд Тейлора по u , начинающиеся по крайней мере с квадратичных членов, $F(0; a) = 0$. Матрица $A(a)$ имеет два мультипликатора $\mu_{1,2} = \rho(a)e^{\pm i\theta(a)}$, где $\rho(0) = 1$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$, причем $\mu = \mu_1 = \bar{\mu}_2$. Пусть $q \in C^2$ – собственный вектор матрицы A , отвечающий μ : $Aq = \mu q$,

и пусть $p \in C^2$ – собственный вектор матрицы A^T , отвечающий $\bar{\mu}$. Всегда возможно нормализовать вектор p по отношению к q : $\langle p, q \rangle = 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в C^2 : $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$. Любой вектор $u \in R^2$ может быть единственным образом представлен как

$$u = zq + \bar{z}\bar{q} \quad (2.16)$$

для некоторого комплексного z , при условии, что введенные выше собственные векторы определены. Действительно, явная формула для определения z есть просто

$$z = \langle p, u \rangle. \quad (2.17)$$

Чтобы проверить формулу (2.17) (которая есть результат скалярного произведения обеих сторон (2.15) на p) мы должны доказать, что $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Это следует из следующей цепочки

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, 1/\bar{\mu} A \bar{q} \rangle =, \quad 1/\bar{\mu} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \mu/\bar{\mu} \langle p, \bar{q} \rangle \quad \text{и,} \quad \text{следовательно,}$$

$$(1 - \mu/\bar{\mu}) \langle p, \bar{q} \rangle = 0. \quad \text{Так как } \mu \neq \bar{\mu}, \text{ то } \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Сделав подстановку (2.16) в (2.15) и записывая сопряженную динамическую систему получим:

$$z \mapsto \langle p, A(a)(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}; a) \rangle = \mu z + g(z, \bar{z}; a),$$

где разложение функции g в ряд Тейлора по z, \bar{z} начинается по крайней мере с квадратичных членов. Запишем более подробно полученное выражение:

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{21}}{2} \bar{z} z^2 + O(|z|^3).$$

Выражение для коэффициента l_1 представляет собой следующее выражение:

$$l_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0}) e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{20}|^2$$

Если $l_1 < 0$, то появляющаяся инвариантная кривая устойчива, если $l_1 > 0$, то неустойчива.

Отметим, что вычисление величины l_1 вручную достаточно трудоемкая задача, предпочтительнее вычислять ее значение, воспользовавшись одним из распространенных пакетов символьной компьютерной алгебры.

Пример 2.9 (продолжение). Напомним, что рассматривается следующее разностное уравнение:

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_{t-1})}. \quad (2.23)$$

Запишем его в виде двумерной системы разностных уравнений, вводя обозначения $v_t = N_{t-1}$, $u_t = N_t$:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= u_t e^{r(1-v_t)} \\ v_{t+1} &= u_t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Неподвижные точки будут решением системы уравнений $ue^{r(1-v)} = u$, $u = v$ и равны $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Якобиан отображения, задаваемый системой (2.18), равен:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} e^{r(1-v)} & -rue^{r(1-v)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якобиан, вычисленный в неподвижной точке $(1, 1)$,

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Tr}(J(1,1)) \pm \sqrt{(\operatorname{Tr}(J(1,1)))^2 - 4 \det(J(1,1))} \right) = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1-4r})$$

Если $r > 1/4$, то мультипликаторы комплексно

сопряженные $\mu, \bar{\mu}$, $\mu = (1 + i\sqrt{4r-1})/2$. Кроме того, $|\mu|^2 = r$, $\rho(r) = \sqrt{r}$. Следовательно, значение параметра $r = 1$ – кандидат на точку бифуркации Неймарка-Сакера.

Пока мы в точности повторили приведенный в главе 2 анализ уравнения (2.23), применяя, однако, специфичные для многомерных систем методы.

Проверим условия невырожденности (2.14), учитывая, что $\theta_0 = \pi/3$:

$$\rho'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}, \quad \rho'(1) = \frac{1}{2} \neq 0, \quad e^{\frac{\pi}{3}} \neq 1, \quad e^{\frac{2\pi}{3}} \neq 1, \quad e^{\pi} \neq 1, \quad e^{\frac{4\pi}{3}} \neq 1.$$

Следовательно, в системе (2.18) действительно происходит рождение единственной замкнутой инвариантной кривой при $r > 1$, причем, как это может быть проверено, данная кривая устойчива ($l_1 = -1/12 < 0$). Фазовый портрет системы (2.18) приведен на рис.2.5.

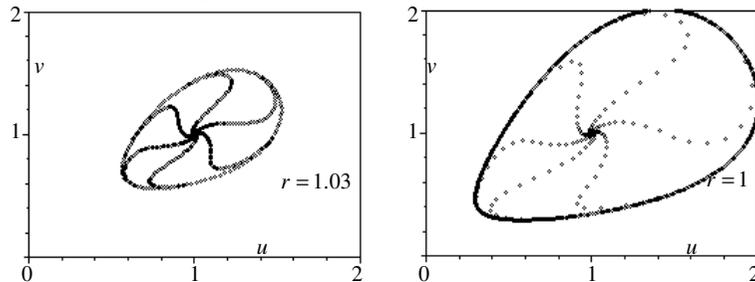


Рис.2.5 Устойчивая замкнутая инвариантная кривая, появляющаяся в уравнении (2.23) или в эквивалентной ему системе (2.18)

2.7 Теорема о центральном многообразии

Важность изучения различных бифуркаций в динамических системах определяется тем, что точки бифуркаций соответствуют перестройкам, резким изменениям поведения анализируемой системы. Если при вариации параметров в рассматриваемой системе не происходит бифуркаций, то она ведет себя достаточно просто – фазовый портрет изменяется, но остается топологически эквивалентным исходному, зная поведение системы при определенном значении параметров, мы можем говорить о качественных чертах ее поведения при близких значениях параметров.

Бифуркации, которые рассматривались в данной главе и главе 2, изучались при наименьшей возможной размерности пространства состояний, в то время как многие реальные системы имеют размерность существенно больше одного или двух. Для объяснения этого рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= a + u_t + u_t^2 \\ v_{t+1} &= \frac{1}{2}v_t \end{aligned}$$

Очевидно, что для исследования бифуркации второе уравнение несущественно и его можно не рассматривать, понизив порядок системы. Оказывается, в окрестности точки бифуркации эта ситуация типична. Для негиперболических неподвижных точек оказываются несущественными все те размерности, которые отвечают мультипликаторам, удовлетворяющим условиям гиперболичности. Основная задача заключается в том, чтобы найти эти существенные размерности. Это позволяет сделать теорема о центральном многообразии.

Рассмотрим следующую динамическую систему с дискретным временем:

$$u \mapsto f(u), u \in R^n, f : R^n \rightarrow R^n, \quad (2.19)$$

где f – достаточно гладкая функция, $f(0) = 0$. Пусть собственные значения матрицы Якоби, вычисленные в неподвижной точке $u^* = 0$, равны $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Предположим, что положение равновесия негиперболическое, и поэтому среди мультипликаторов есть собственные значения, по абсолютной величине равные единице. Пусть n_-, n_0, n_+ – число мультипликаторов u^* лежащих внутри, на и снаружи единичной окружности $\{\mu \in C : |\mu| = 1\}$ соответственно. Линейное инвариантное собственное пространство матрицы A , соответствующее объединению n_0 мультипликаторов на единичной окружности, обозначим через T^c . Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6 (Теорема о центральном многообразии) *В окрестности неподвижной точки u^* существует инвариантное гладкое n_0 -мерное многообразие W^c системы (2.19), касательное к T^c при $u = 0$. Более того, существует окрестность U неподвижной точки u^* , такая что если $f^t(u) \in U$ для всех $t \geq 0$ ($t \leq 0$), то $f^t(u) \rightarrow W^c$ для $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).*

Определение 2.13 *Многообразие W^c называется центральным (нейтральным) многообразием*

Доказательство теоремы 2.6 см. [9].

В базисе из собственных векторов система (2.19) может быть записана с следующей форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bx + g(x, y) \\ Cy + h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где $x \in R^{n_0}$, $y \in R^{n_+ + n_-}$, B – $n_0 \times n_0$ матрица, все собственные значения которой по модулю равны одному, C – $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ матрица, среди собственных значений которой нет удовлетворяющих условию $|\mu| = 1$, функции g, h имеют разложение в ряд Тейлора начинающееся по крайней мере с квадратичных членов. Центральное многообразие W^c системы (2.20) может быть локально представлено как график гладкой функции

$$W^c = \{(x, y) : y = V(x)\}.$$

В силу того, что центральное многообразие касается T^c в самой неподвижной точке, $V(x) = O(\|x\|^2)$, то есть разложение в ряд Тейлора $V(x)$ начинается с квадратичных членов.

Теорема 2.7 *Система (2.20) локально топологически эквивалентна в окрестности начала координат системе*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bx + g(x, V(x)) \\ Cy \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Уравнения для x и y в системе (2.21) не связаны. Первое уравнение (2.21) – это сведение системы (2.20) на центральное многообразие. Таким образом, динамика структурно неустойчивой системы (2.20) по существу определяется этим сведением, так как второе уравнение (2.21) линейно и имеет решение, которые либо стремятся к нулю либо к бесконечности, в зависимости от числа n_+ .

Уравнение для $V(x)$ находится следующим образом.

Подставив $y = V(x)$ в систему

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= Bx + g(x, y) \\ \tilde{y} &= Cy + h(x, y)\end{aligned}$$

получим для второго уравнения $V(\tilde{x}) = CV(x) + h(x, V(x))$ (здесь мы воспользовались инвариантностью центрального многообразия – если $y = V(x)$, то $\tilde{y} = V(\tilde{x})$). Подставляя первое уравнение в полученное выражение получим

$$V(Bx + g(x, V(x))) - CV(x) - h(x, V(x)) = 0.$$

Это уравнение дополнено граничными условиями (так как W^c касательно к T^c): $V(0) = 0$, $V_x(0) = 0$. Его практически никогда не удается решить точно, однако почти всегда возможно получить аппроксимацию $V(x)$ в виде ряда Тейлора.

Теоремы 2.6 и 2.7 мало пригодны для анализа бифуркаций. Они приведены для одной фиксированной динамической системе, в то время как для бифуркационного анализа необходимо исследовать семейство динамических систем, зависящее от одного или нескольких параметров. Однако эту проблему можно решить достаточно просто.

Рассмотрим систему, которая зависит от параметра:

$$u \mapsto f(u; a), u \in R^n.$$

Предположим, что при $a = 0$ эта система имеет негиперболическое положение равновесия $u^* = 0$ с n_0 мультипликаторами на единичной окружности. Рассмотрим расширенную систему, считая параметр новой переменной:

$$\begin{cases} u \mapsto f(u, a) \\ a \mapsto a \end{cases}.$$

Якобиан этой системы, вычисленный в неподвижной точке $(a, u) = (0, 0)$ имеет $n_0 + 1$ мультипликаторов по абсолютной величине равных единице. Таким образом к этой системе мы можем применить теорему о центральном многообразии. Эта теорема гарантирует существование $n_0 + 1$ -мерного центрального многообразия W_a^c и сведение исходной динамической системы будет представлять собой $n_0 + 1$ -мерную динамическую систему.

Пример 2.3 Рассмотрим пример, обращая внимание на приведение динамической системы к виду (2.20) и аппроксимации центрального многообразия.

Рассмотрим следующую двумерную динамическую систему:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Линейный анализ неподвижной точки $(0, 0)$ не дает ответа о ее устойчивости, так как собственные значения матрицы Якоби в неподвижной точке равны 1 и $1/2$ – положение равновесия негиперболическое.

Чтобы аппроксимировать центральное многообразие, необходимо привести систему (2.22) к виду (2.20). Система (2.22) в краткой записи выглядит $x \mapsto Ax + f(x)$. Собственные вектора, отвечающие собственным значениям матрицы Якоби, удобно представить как столбцы матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда преобразование подобия, приводящее матрицу A к диагональной форме, имеет вид $J = C^{-1}AC$. Сделав замену переменных в задаче (2.22) $x = Cy$, или, подробно,

$x_1 = y_1 + 2y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, получаем $Cy \mapsto ACy + f(Cy)$.

Умножаем обе части на C^{-1} и окончательно получаем $y \mapsto C^{-1}ACy + C^{-1}f(Cy) = Jy + C^{-1}f(Cy)$.

Для системы (2.22) получим

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(y_1 + y_2)^3 \\ -(y_1 + y_2)^3 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Система (2.23) записана в виде (2.20) и теперь можно переходить к поиску центрального многообразия в виде $y_2 = V(y_1)$. Представим $V(y_1)$ в виде ряда Тейлора с неизвестными коэффициентами:

$V(y_1) = w_2 y_1^2 + w_3 y_1^3 + O(y_1^4)$. Из второго уравнения (2.23) получаем:

$$w_2 \tilde{y}_1^2 + w_3 \tilde{y}_1^3 + O(\tilde{y}_1^4) = \frac{1}{2}(w_2 y_1^2 + w_3 y_1^3 + O(y_1^4)) + (y_1 + w_2 y_1^2 + w_3 y_1^3 + O(y_1^4))^3$$

Подставляем из первого уравнения (2.23)

$\tilde{y}_1 = y_1 - 2(y_1 + V(y_1))^3$ в полученное выражение, и оставляя только слагаемые степени три и меньше имеем

$$w_2 (y_1 + \dots)^2 + w_3 (y_1 + \dots)^3 + \dots - \frac{1}{2}(w_2 y_1^2 + w_3 y_1^3 + \dots) - (y_1 + \dots)^3 = 0.$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при степенях y_1 , получаем уравнения относительно неизвестных w_i :

$$\frac{1}{2} w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 0, \quad \left(\frac{1}{2} w_3 - 1 \right) = 0 \Rightarrow w_3 = 2.$$

Таким образом, мы получили аппроксимацию центрального многообразия $y_2 = V(y_1) = 2y_1^3 + O(y_1^4)$.

Подставляем это выражение в первое уравнение (2.23):

$$\tilde{y}_1 = y_1 - 2(y_1 + 2y_1^3 + \dots)^3 = y_1 - 2y_1^3 + \dots \quad (2.24)$$

Уравнение (2.24) – это сведение системы (2.23) на центральное многообразие. Так как центральное

многообразие инвариантно, то мы рассматриваем его как новое фазовое пространство динамической системы (2.24). Неподвижная точка отображения (2.24) $y_1 = 0$ устойчива (это можно видеть, например, с помощью графического анализа, описанного в главе 2). Следовательно, по теореме 2.7 неподвижная точка (0,0) исходной системы (2.22) так же устойчива, так как второе собственное значение равно $1/2$, и, следовательно, центральное многообразие притягивающее.

2.8 Примеры математических моделей взаимодействия популяций

Как указывалось выше, существует три основных типа взаимодействия популяций. Первый тип – взаимодействие хищник-жертва, когда один из видов отрицательно воздействует на скорость роста второго, второй – конкуренция, взаимно негативное влияние на скорости роста популяций, третий – симбиоз, когда виды либо взаимно положительно действуют друг на друга (мутуализм) и взаимодействие обязательно, либо когда один из видов помогает другому (протокооперация), но само взаимодействие необязательно (не облигаторно). Каждый из этих трех типов взаимодействия может быть промоделирован с помощью математических моделей, описываемых дискретными динамическими системами. Приведем ряд примеров математических моделей, описывающих взаимодействие типа хищник-жертва.

Пример 2.4 Пусть N_i – численность популяции некоторого вида (жертв) в момент времени t , который представляет собой пищу для другого вида (хищника),

численность которого обозначим P_t . Рассмотрим следующую модель

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= rN_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} &= N_t (1 - e^{-aP_t}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Предполагается, что $a > 0, r > 1$. В отсутствие хищников ($P_t = 0$), $N_{t+1} = rN_t$, то есть происходит увеличение численности жертв в геометрической прогрессии с показателем $r > 1$. С другой стороны, при отсутствии жертв популяция хищников вымирает за одно поколение, так как верна логическая цепочка $N_t = 0 \Rightarrow P_t = 0$. В общем случае наличия хищников уменьшает на каждом временном шаге популяцию жертв в $\exp(-aP_t)$ раз, что, в свою очередь, также отражается на численности хищников на следующем временном шаге и описывается вторым уравнением (2.25).

Отображение, задаваемое системой (2.25), имеет две неподвижные точки $N_1^* = P_1^* = 0$ и $N_2^* = \frac{r}{a(r-1)}, P_2^* = \frac{\ln r}{a}$.

Якобиан отображения (2.25)

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} re^{-aP} & -arNe^{-aP} \\ 1 - e^{-aP} & aNe^{-aP} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при $r > 1$ положение равновесия $(0, 0)$ неустойчиво. Для второй неподвижной точки

$$J(N_2^*, P_2^*) = \begin{pmatrix} 1 & -aN_2^* \\ \frac{r-1}{r} & \frac{a}{r}N_2^* \end{pmatrix}.$$

Устойчивость этой неподвижной точки определяется величинами собственных значений, которые

удовлетворяют характеристическому уравнению:

$$\mu^2 + \mu \left(1 + \frac{\ln r}{r-1} \right) + \frac{r \ln r}{r-1} = 0.$$

Так как $\ln r < r - 1$ при $r > 1$, то дискриминант этого уравнения меньше нуля, корни уравнения комплексно сопряженные, и их произведение

$$\mu_1 \mu_2 = |\mu_1|^2 = \frac{r \ln r}{r-1}.$$

Последнее выражение больше одного при $r > 1$. Следовательно, положение равновесия (N_2^*, P_2^*) также неустойчиво. Численные решения системы (2.25) указывают, что решения растут неограниченно. Таким образом, математическая модель (2.25) слишком проста для практического применения, кроме, возможно, ограниченного промежутка времени.

Пример 2.5 Рассмотрим следующую динамическую систему с дискретным временем, также описывающую тип взаимодействия хищник-жертва:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= au_t(1-u_t) - u_t v_t \\ v_{t+1} &= \frac{1}{b} u_t v_t \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь u_t – относительная численность жертв в момент времени t (под относительной численностью понимается отношение действительной численности популяции к максимально возможной, которая определяется потенциальной емкостью экосистемы), v_t – относительная численность хищников в момент времени t , $a, b > 0$ – параметры модели, a – скорость роста популяции жертв при отсутствии ограничений, b – параметр, обратно пропорциональный выгоде хищников. При формулировке

модели предполагалось следующее: в отсутствие хищника динамика численности жертв описывается логистическим уравнением (2.7), отрицательное влияние хищников есть просто билинейная функция, в отсутствие жертв хищники вымирают за одно поколение. Так как нас интересуют только неотрицательные траектории задачи (2.26), то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 < u_t < 1, \\ 0 < v_t < \frac{au_t(1-u_t)}{u_t}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Кроме того, принимая во внимание анализ логистического уравнения главы 2, мы должны потребовать, чтобы $0 < a < 4$.

Анализ моделей вида (2.1) практически всегда начинается с нахождения неподвижных точек. Для системы (2.26) неподвижные точки будут решениями системы уравнений

$$\begin{cases} au(1-u) - uv = u \\ \frac{1}{b}uv = v \end{cases} \Rightarrow Eq_1 = (0,0), \quad Eq_2 = \left(\frac{a-1}{a}, 0\right),$$

$$Eq_3 = (b, a(1-b) - 1)$$

Таким образом, может быть три неподвижных точки. Так как мы интересуемся только неотрицательными решениями, то Eq_1 существует при всех значениях параметров, Eq_2 существует, если $a > 1$, Eq_3 существует, если $b < (a-1)/a$.

Якобиан отображения, задаваемого системой уравнений (2.26) равен

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} a - 2u - v & -u \\ \frac{1}{b}v & \frac{1}{b}u \end{pmatrix}.$$

Определим характер неподвижных точек.

$$J(Eq_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно собственные значения $\mu_1 = a$, $\mu_2 = 0$ – система (2.26) необратима в окрестности начала координат, однако, вспоминая анализ логистического уравнения, мы можем утверждать, что Eq_1 устойчива, если $0 < a < 1$ и неустойчива при $a > 1$ (это естественно, так как условие $0 < a < 1$ обеспечивает вымирание жертв даже в отсутствие хищников).

Для второй неподвижной точки

$$J(Eq_2) = \begin{pmatrix} 2-a & \frac{a-1}{a} \\ 0 & \frac{a-1}{ab} \end{pmatrix},$$

и мультипликаторы Eq_2 равны $\mu_1 = 2-a$, $\mu_2 = (a-1)/ab$. Значит, Eq_2 будет устойчива при одновременном выполнении условий $1 < a < 3$ и $b > (a-1)/a$. Невыполнение первого из условий влечет появление мультипликатора, равного -1 – линия $a=3$ состоит из точек бифуркаций удвоения периода, вторая кривая бифуркаций коразмерности один – $b = (a-1)/a$.

Для третьей неподвижной точки

$$J(Eq_3) = \begin{pmatrix} 1-ab & -b \\ \frac{a(1-b)-1}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения будут равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(2 - ab \pm \sqrt{a^2 b^2 + 4a(b-1) + 4} \right).$$

Найдем области, в которых Eq_3 будет точно неустойчива из условия $|\mu_1 \mu_2| > 1$. Так как $\mu_1 \mu_2 = a - 2ab$, то искомыми областями будут $b > (a+1)/(2a)$ и $b < (a-1)/(2a)$. Если принять $b = (a-1)/(2a)$, то собственные значения

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4} \left(5 - a \pm \sqrt{(a-1)(a-9)} \right)$$

будут комплексно сопряженными при $1 < a < 9$ и по модулю равными единице – условия бифуркации Неймарка-Сакера. Можно проверить, что эта бифуркация будет “мягкой”, с рождением единственной замкнутой инвариантной кривой.

Покажем, как вычисляется коэффициент, определяющий устойчивость замкнутой инвариантной кривой. Во-первых, сделаем замену переменных, чтобы исследуемая неподвижная точка находилась в начале координат: $u_t = \tilde{u}_t + b, v_t = \tilde{v}_t + a(1-b) - 1$. Тогда исходная система примет вид (отбрасывая волны над переменными для упрощения записи):

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= -au_t^2 - abu_t - u_t v_t + u_t - bv_t \\ v_{t+1} &= (u_t v_t + au_t - abu_t - u_t + bv_t) / b \end{aligned}$$

Собственное значение запишем в виде

$$\mu = \left(5 - a + i\sqrt{(a-1)(9-a)} \right) / 4,$$

матрица Якоби при бифуркационных значениях параметра $b = (a-1)/(2a)$ будет

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3-a}{a} & \frac{1-a}{2a} \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, который находится из условия $Aq = \mu q$, можно взять

$$q = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{4a} + i \frac{\sqrt{(a-1)(9-a)}}{4a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, который находится из условия $A^T p = \bar{\mu} p$, можно взять

$$p = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + i \frac{a\sqrt{(a-1)(9-a)}}{2(a-1)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как необходимо, чтобы $\langle p, q \rangle = 1$, умножим q на нормирующий множитель $(9 - a + i\sqrt{(a-1)(9-a)}) / 4$.

Для вычисления коэффициентов g_{ij} предположим, что при бифуркационном значении параметра функция $F(u, a)$ из (2.15) может быть представлена в виде

$$F(u, a) = \frac{1}{2} B(u, u) + \frac{1}{6} C(u, u, u) + O(\|u\|^4),$$

где $B(x, y)$ и $C(x, y, u)$ – симметричные мультилинейные вектор-функции $x, y, u \in R^2$. В поординатной записи

$$\begin{aligned} B_i(x, y) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F(\xi, a)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i=1,2, \\ C_i(x, y, u) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F(\xi, a)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Тогда $B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z}B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q})$ где вектора p и q взяты при бифуркационном значении параметра. Тогда коэффициенты разложения Тейлора функции $g(z, \bar{z}, a)$ могут быть выражены формулами

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

сходные вычисления для C дают выражение $g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$.

Для рассматриваемого примера

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} -2ax_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 \\ \frac{2a}{a-1}(x_1y_2 + x_2y_1) \end{pmatrix}, \quad C(x, y, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Несложные, но утомительные вычисления дают следующие выражения

$$g_{20} = \frac{-2(a-1- iw)(a^2 - 8a + 15 + 2iw)}{(a-1)(a-9- iw)^2},$$

$$g_{11} = \frac{-4(a+3- iw)}{(a-9)^2 + w^2},$$

$$g_{02} = \frac{-8(a^2 - 4a + 3 + 2iw)}{(a-1)(a-9+ iw)^2},$$

$$g_{21} = 0,$$

где $w = \sqrt{(a-1)(9-a)}$. Применение формулы из пункта 2.6 позволяет вычислить первый Ляпуновский коэффициент

$$l_1 = \frac{a(a^2 - 8a + 15)}{(a-1)(a^2 - 18a + 81)} - \frac{2a}{(9-a)^2} - \frac{8a}{(a-9)^2(a-1)} = \frac{a}{a-9},$$

т.е., если $a \in (1, 9)$, то $l_1 < 0$ – появляется единственная устойчивая инвариантная кривая (другие условия невырожденности бифуркации остаются в качестве упражнения).

Другой способ вычисления коэффициентов g_{ij} (который может быть проще при использовании пакетов символьной компьютерной алгебры) состоит в определении комплексно-значной функции $G(z, w) = \bar{p}_1 F_1(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) + \bar{p}_2 F_2(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2)$ далее необходимо вычислить формальные частные производные по z, w в точке $z=0, w=0$. Тогда искомые коэффициенты будут равны $g_{20} = G_{zz}, g_{11} = G_{zw}, g_{02} = G_{ww}, g_{21} = G_{zww}$. В этом случае не требуется вычисления мультилинейных функций.

Всю полученную информацию сведем в параметрический портрет (рис.2.6) и проиллюстрируем фазовыми портретами (напомним, что параметрический портрет вместе с характерными для каждой области параметров фазовыми портретами составляет бифуркационную диаграмму).

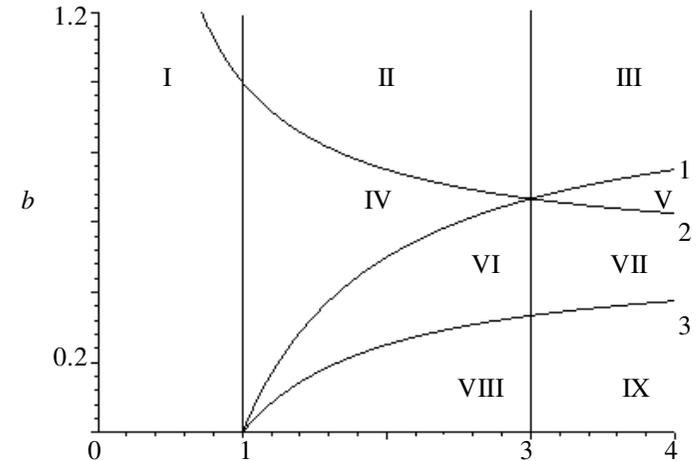


Рис. 2.5 Параметрический портрет системы (2.26). Кривые на графике: 1 - $(a-1)/a$, 2 - $(a+1)/(2a)$, 3 - $(a-1)/(2a)$

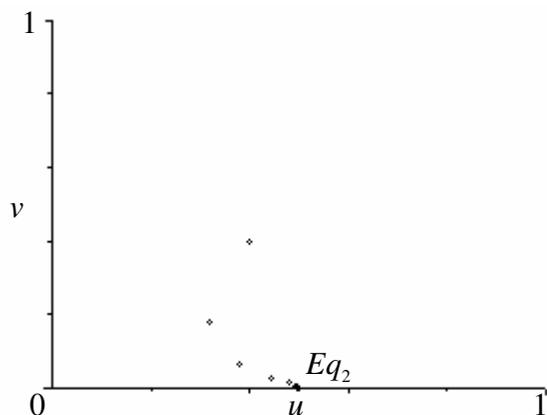


Рис.2.7 Фазовый портрет системы (3.26) для областей II и IV на рис. 3.5

В области I все траектории, удовлетворяющие ограничениям (2.27), стремятся к началу координат, происходит вымирание обеих популяций. Области II и IV эквивалентны – кроме неустойчивой неподвижной точки Eq_1 появляется устойчивая неподвижная точка Eq_2 – происходит вымирание хищников, в то время как популяция жертв приходит в стационарное состояние (рис.2.7). Если переходить из области II в область III, то будет происходить бифуркация удвоения периода – фазовый портрет будет схож с рис.2.7, однако численность жертв будет стремиться не к неподвижной точке Eq_2 , которая в этой области неустойчива, а к устойчивому циклу длины два, который располагается на прямой $v = 0$. Если продолжать увеличивать значения параметра a , то в итоге мы получим хаотическое поведение численности жертв, описываемое логистическим уравнением.

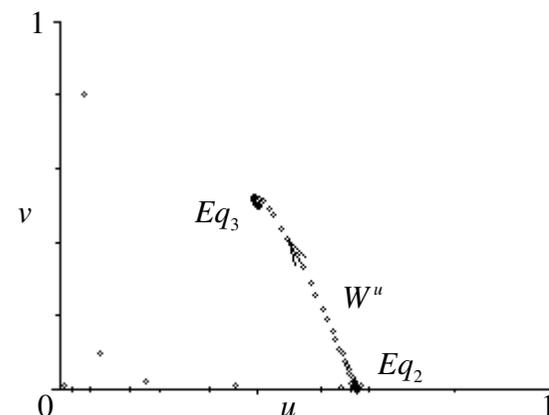


Рис.2.8 Фазовый портрет системы (3.26) для области VI на рис.3.5

При пересечении кривой 1 из области IV в область VI Eq_2 становится неустойчивой, кроме устойчивого многообразия W^s , расположенного на прямой $v = 0$, появляется неустойчивое многообразие W^u . Однако одновременно в области положительных значений параметров появляется устойчивая неподвижная точка Eq_3 (рис.2.8). Похожая картина реализуется для области VII – существует устойчивая неподвижная точка Eq_3 , которая является глобальным аттрактором для траекторий системы (2.25). Для этих областей взаимодействующие популяции приходят в равновесное ненулевое состояние, наблюдается устойчивый баланс между хищниками и жертвами.

При пересечении кривой 3 из областей VI и VII в области VIII и IX происходит бифуркация Неймарка-Сакера с рождением устойчивой инвариантной кривой (рис.2.9) – численность жертв и хищников изменяется

колебательным образом, оставаясь в окрестности неустойчивой неподвижной точки Eq_3 . Если продолжать удаляться от бифуркационной кривой 2, то амплитуда колебаний увеличивается, и при некоторых значениях параметров значения численности жертв выйдут за ограничения (2.26), в этом случае система (2.25) не может считаться математической моделью взаимодействия двух видов. Отметим, что возможность описания колебательных режимов должна быть присуща моделям типа (2.25), так как в природе действительно часто наблюдаются устойчивые колебания численности различных видов.

Наконец, область V. Численный анализ показывает, что при пересечении кривой 2 появляется устойчивый цикл

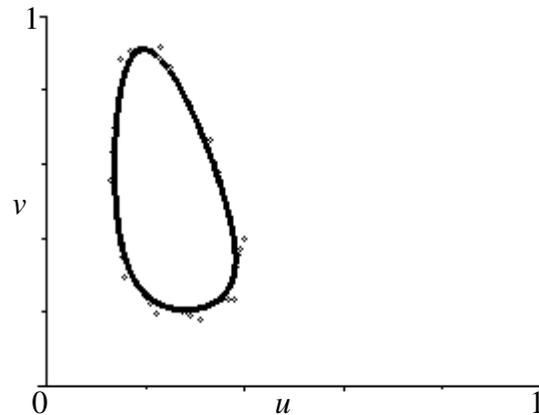


Рис.2.9 Фазовый портрет системы (2.26) для областей VIII и IX на рис.2.5

длины четыре, который затем бифурцирует в аттрактор сложной структуры, так называемый хаотический аттрактор (рис.2.10). Сложность структуры аттрактора можно пояснить тем, что он не является ни устойчивой неподвижной точкой, ни циклом определенной длины, ни

замкнутой инвариантной кривой. Все траектории будут стремиться к этому аттрактору, а изменение численности хищников и жертв будет происходить сложным нерегулярным образом.

Рассмотренные примеры 2.5 и 2.6 указывают на ряд недостатков неидеального характера описания динамики взаимодействующих видов с помощью дискретных динамических систем. В первом случае простота заданных соотношений явилась причиной неадекватного поведения траекторий (неограниченность) и, следовательно,

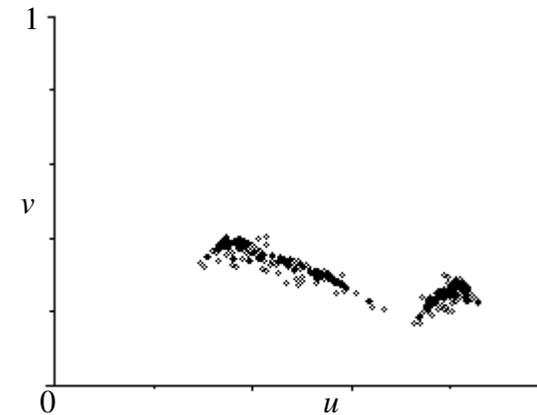


Рис.2.10 Фазовый портрет системы (2.26) для одной из точек области V на рис.2.5

невозможности применения на практике. Во втором случае модель допускает ряд динамических режимов (наличие устойчивой нетривиальной неподвижной точки, колебательное поведение), которые могут быть исследованы аналитически, однако эта возможность аналитического исследования обусловлена полиномиальной формой функций, входящих в

отображение (2.26). Во многих других случаях необходимо численное исследование.

Пример 2.6 Для более реалистического описания взаимодействия хищников и жертв примера 2.4 введем в модель эффект насыщения численности популяции жертв, отражающий тот факт, что численность реальной популяции всегда ограничена. Например, более реалистичной моделью будет следующая система:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - aP_t\right), \\ P_{t+1} &= N_t(1 - \exp(-aP_t)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Во-первых отметим, что не все параметры значимы, так как заменой переменных $u = N/K$, $v = P/K$, $b = a/K$ можно уменьшить число параметров на единицу:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= u_t \exp(r(1 - u_t) - bv_t) \\ v_{t+1} &= u_t(1 - \exp(-bv_t)) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Нетривиальные положения равновесия (2.29) являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 1 = \exp(r(1 - u^*) - bv^*) \\ v^* = u^*(1 - \exp(-bv^*)) \end{cases}$$

Из первого уравнения $v^* = r(1 - u^*)/b$ и, следовательно, u^* – решения трансцендентного уравнения

$$\frac{r(1 - u^*)}{bu^*} = 1 - \exp(r(1 - u^*)).$$

Одно решение этого уравнения очевидно: $u^* = 1$ (и, следовательно, $v^* = 0$). С помощью графического анализа можно показать, что существует еще одно решение, причем $0 < u^* < 1$. Численно можно показать, что при

некоторых значениях параметров это второе решение будет устойчиво, а затем потеряет устойчивость через бифуркацию Неймарка-Сакера с появлением устойчивой инвариантной кривой.

Отметим, что общий вид модели “хищник-жертва”, достаточно часто используемый в анализе динамики популяций насекомых, имеет вид

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= rN_t f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} &= N_{t+1}(1 - f(N_t, P_t)) \end{aligned}$$

Здесь $f(N, P)$ – нелинейная функция, такая, что $0 < f(N, P) < 1$, монотонно возрастающая по N при фиксированном P и монотонно убывающая по P при фиксированном N . Можно показать, что устойчивость неподвижных точек этого отображения (N^*, P^*) определяется величинами собственных значений, которые удовлетворяют квадратному уравнению $\mu^2 - \mu(1 + rN^* f'_N(N^*, P^*) - N^* f'_P(N^*, P^*)) - rN^* f'_P(N^*, P^*) = 0$

2.9 Падение и взлет численности в математической модели популяции жука Tribolium

Группа исследователей предложила математическую модель популяции мучного жука Tribolium [24]. Понимание причин, оказывающих влияние на изменение численности этого вида насекомых очень важно (как, впрочем, и многих других), так как предложение стратегий по регулированию его численности может дать серьезный

экономический эффект в обрабатывающей промышленности.

Жук *Tribolium* имеет три стадии развития: личинки (larva), куколки (pupa), и непосредственно взрослого насекомого (adult). Только что отложенная личинка питается около двух недель до вступления в фазу куколки приблизительно той же продолжительности. Трехфазная модель динамики численности жука, в которой естественно принять за единицу времени две недели, имеет вид (ср. с моделью Лесли, пункт 2.2):

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= bA_t \\ P_{t+1} &= (1 - \eta_l)L_t \\ A_{t+1} &= (1 - \eta_p)P_t + (1 - \eta_a)A_t \end{aligned} \quad (2.30)$$

где b - коэффициент рождаемости (количество отложенных личинок одним взрослым насекомым за единицу времени), η_l , η_p , η_a - коэффициенты смертности личинок, куколок и взрослых особей соответственно (отношение числа умерших особей за единицу времени к общему числу).

Система (2.30) линейна. Единственная неподвижная точка - начало координат, - будет неустойчива, если $b > 1$. Однако в реальности динамика популяции жука *Tribolium* имеет особенность, которая вносит существенные изменения в предложенную модель. Дело в том, что когда популяция жуков достигает некоторой плотности, взрослые особи начинают поедать куколок и отложенные яйца (eggs) (будущие личинки), сами личинки так же поедают яйца. С учетом этих обстоятельств исходная модель (2.30) приобретает вид

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= bA_t \exp(-c_{ea}A_t - c_{el}L_t) \\ P_{t+1} &= (1 - \eta_l)L_t \\ A_{t+1} &= (1 - \eta_p)P_t \exp(-c_{pa}A_t) + (1 - \eta_a)A_t \end{aligned} \quad (2.31)$$

где параметры c_{ea} , c_{el} , c_{pa} описывают эффект каннибализма. В ходе популяционных экспериментов и наблюдений были найдены значения параметров $c_{el} = 0.012$, $c_{ea} = 0.009$, $c_{pa} = 0.004$, $\eta_l = 0.267$, $\eta_p = 0$, $\eta_a = 0.0036$, $b = 7.48$. Эффект разрушения естественной динамики может быть вызван искусственным изменением одного из параметров, в данном случае наиболее удобно оперировать коэффициентом смертности взрослых особей η_a . На рис. 2.11 приведена бифуркационная диаграмма системы (2.31), где приведена зависимость асимптотической численности личинок от величины коэффициента смертности взрослых особей.

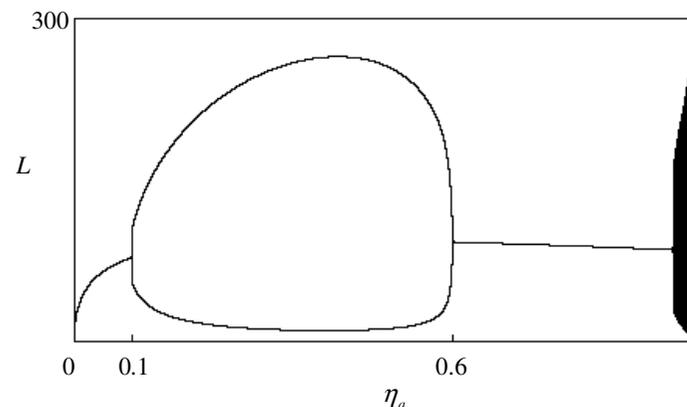


Рис.2.11 Бифуркационная диаграмма модели (2.31). Бифуркационный параметр - коэффициент смертности взрослых особей

Для относительно низких коэффициентов смертности численность личинок приходит в стационарное

состояние (неподвижную точку). При $\eta_a > 0.1$ существует устойчивый цикл периода два, когда численность личинок колеблется между двумя значительно различными величинами. Это явление широко известно в популяционной биологии и носит название всплеск численности. Низкая численность приводит к избытку пищи и значительному росту популяции на следующей стадии. В этой точке появляются ограничения роста (для рассматриваемой системы – каннибализм) с последующим уменьшением популяции. При $\eta_a > 0.6$ цикл исчезает, остается единственная устойчивая неподвижная точка. Для очень высоких значений коэффициента смертности имеет сложное непериодическое поведение.

После того, как математическая модель построена, начинается этап проверки ее адекватности. В случае системы (2.31), рассматриваемой в качестве модели динамики популяции жука *Tribolium*, сравнение результатов моделирования и экспериментов показывает прекрасное соответствие для всей области значений бифуркационного параметра, включая промежутки сложного, нерегулярного поведения.

2.10 Многомерные показатели Ляпунова

Кроме простых замкнутых инвариантных множеств дискретных динамических систем, таких как положение равновесие, цикл некоторой конечной длины, замкнутая инвариантная кривая, возможно существование более сложных замкнутых инвариантных множеств, один из примеров которых приведен на рис.2.10. Напомним, что

замкнутые устойчивые инвариантные множества называются аттракторами. Значительную информацию о сложных инвариантных множествах дают показатели и числа Ляпунова для многомерных динамических систем.

Пусть U – сфера в R^n единичного радиуса. Рассмотрим гладкое отображение $f : R^n \rightarrow R^n$, и пусть $A(u) = f_u(u)$ – его матрица Якоби, через $A_m(u)$ обозначим якобиан отображения f^m . Матрица Якоби $A_m(u)$ отобразит сферу U в некоторый эллипсоид в R^n с ортогональными осями. Те оси эллипсоида, которые по своей длине больше чем один определяют растягивающие направления отображения, а те, что короче – сжимающие. Показатели и числа Ляпунова и характеризуют наличие растягивающих и сжимающих направлений при анализе близких траекторий динамических систем.

Определение 2.14 Пусть $f : R^n \rightarrow R^n$ – гладкое отображение, и пусть $A(u) = f_u(u)$ – его Якобиан. Через r_k^m , $k = 1, \dots, n$ обозначим длину k -ой величины (в порядке убывания) ортогональной оси эллипсоида $A_m(U)$, $U = \{u : |u_1 - u| \leq 1\}$. k -ым числом Ляпунова траектории, начинающейся в u_1 , называется величина

$$l_k(u_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} (r_k^m)^{\frac{1}{m}},$$

если этот предел существует.

k -ым показателем Ляпунова траектории, начинающейся в u_1 , называется величина

$$h_k(u_1) = \ln(l_k(u_1)).$$

Из определения следует, что $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ и $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$.

Из определения 2.14 следует, что Ляпуновские числа и показатели характеризуют отдельную траекторию. Однако доказана теорема [], согласно которой набор Ляпуновских показателей характеризует весь аттрактор, то есть числа и показатели Ляпунова одни и те же для почти всех траекторий на аттракторе.

Обычно важно только старшее число Ляпунова (или, эквивалентно, старший показатель Ляпунова).

Определение 2.15 *Аттрактор называется хаотическим, если старшее число Ляпунова строго больше одного (старший показатель Ляпунова положителен).*

В силу определения 2.15 хаотический аттрактор характеризуется разбеганием близких траекторий (в среднем в e^h раз за одну итерацию). Другими словами, устойчивость хаотического аттрактора (притяжение близких траекторий) сочетается с неустойчивостью траекторий на самом аттракторе.

Пример 2.7 (Отображение “Колокол лудильщика”)

Рассмотрим следующее двумерное отображение

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2 - v^2 + c_1 u + c_2 v \\ 2uv + c_3 u + c_4 v \end{pmatrix},$$

где $c_i \in R, i = 1, \dots, 4$. Если задать следующие значения параметров: $c_1 = 0.9, c_2 = -0.6, c_3 = 2, c_4 = 0.5$, то для многих начальных условий из окрестности начала координат итерирование этого отображения будет давать одну и ту же картину (рис.2.12(a)). Если увеличить изображение приведенного аттрактора, то можно видеть

сложную структуру, которая характеризуется свойством самоподобия, присущим многим хаотическим аттракторам (рис.2.12(б))

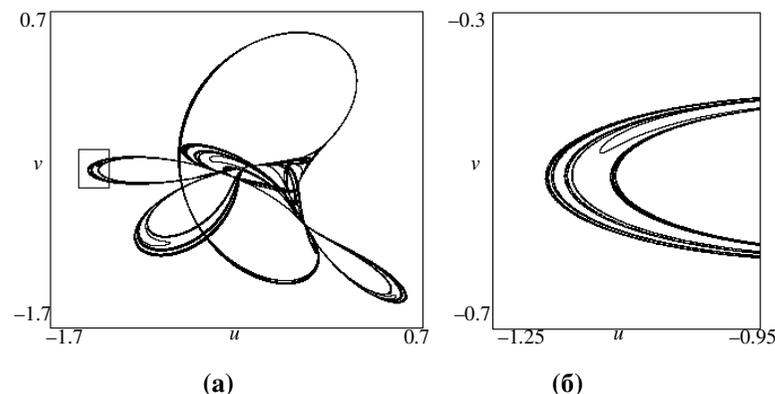


Рис.2.12 Хаотический аттрактор отображения примера 2.7 (а), увеличенный фрагмент хаотического аттрактора, иллюстрирующий свойство самоподобия

Для вычисления всех показателей Ляпунова используется следующий алгоритм [8,22].

Рассматривается n -мерная динамическая система с дискретным временем $u \mapsto f(u), u \in R^n$ и предполагается, что начальные значения u_0 принадлежат аттрактору (для этого достаточно задать произвольные начальные условия из области притяжения аттрактора и проитерировать отображение достаточное число раз).

Алгоритм вычисления показателей Ляпунова:

1. Задаем n ортонормированных векторов $v_0^i, i = 1, \dots, n$, присваиваем $\sigma_0^i = 0, t_0 = 0$.
2. Находим $u_{t+1} = f(u_t), v_{t+1}^i = f_u(u_t)v_t^i$.

3. Ортогонализуем систему векторов v_{t+1}^i и получаем \tilde{v}_{t+1}^i .

4. Вычисляем $\sigma_{t+1}^i = \sigma_t^i + \ln \|\tilde{v}_{t+1}^i\|$, $i = 1, \dots, n$.

5. Нормируем систему векторов \tilde{v}_{t+1}^i , получаем ортонормированный базис на следующем шаге $v_{t+1}^i = \frac{\tilde{v}_{t+1}^i}{\|\tilde{v}_{t+1}^i\|}$, $i = 1, \dots, n$.

6. Увеличиваем время: $t = t + 1$.

7. Повторяем пункты 2-6 нужное число N раз.

8. Получаем окончательную оценку показателей

Ляпунова $l_i \cong \frac{\sigma_N^i}{N}$, $i = 1, \dots, n$.

Пример 2.5 (продолжение) Получим оценки показателей Ляпунова для различных областей параметров системы (2.26). В областях параметров II, IV и VI (рис.2.7) показатели Ляпунова отрицательны $l_2 < l_1 < 0$ (в этих областях существует единственная устойчивая неподвижная точка. В областях VIII и IX, там, где существует устойчивая инвариантная кривая, старший показатель Ляпунова равен нулю, а l_2 отрицателен (этот факт показывает, что траектории стремятся к инвариантной кривой, а на самой кривой расстояние между близкими траекториями остается постоянным). Для многих точек области V выполняется соотношение $0 < l_2 < l_1$ – притягивающее множество хаотично, причем разбегание траекторий происходит в двух направлениях. Отметим, что данная ситуация не совсем типичная, так как для хаотических аттракторов двумерных систем обычно один

из показателей Ляпунова больше нуля, другой – меньше.

Пример 2.8 (Модель динамики популяции жука Tribolium, продолжение) На рис.2.11 существует интервал значений параметра η_a , где поведение решений системы (2.31) кажется сложным и нерегулярным. Однако, вычисление показателей Ляпунова показывает, что старший показатель достаточно близок к нулю – признак существования замкнутой инвариантной кривой. Это действительно так, результат компьютерных экспериментов приведен на рис.2.13.

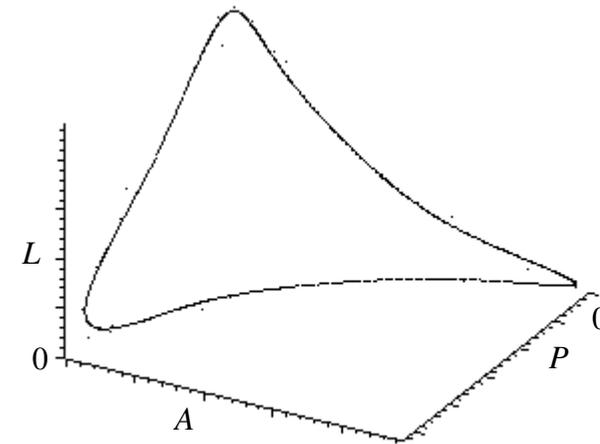


Рис.2.13 Инвариантная кривая в модели динамики популяции жука Tribolium (2.31)

Открытие существования хаотических аттракторов имело серьезные последствия для многих научных дисциплин. Как говорилось выше, хаотический аттрактор характеризуется разбеганием близких траекторий и сложной нерегулярной динамикой. Если раньше результаты экспериментов и наблюдений в той или иной

предметной области казались случайными, то это объяснялось неучтенным внешним воздействием и нечистотой самих экспериментов и наблюдений. Существование хаотических аттракторов в корне изменило это представление, так как “случайный” характер поведения исследуемой системы может быть вызван не только погрешностью наблюдений, но и нелинейностью самой системы. Кроме того, возможность принадлежности динамического процесса к хаотическому аттрактору наложило серьезные ограничения на возможности прогноза [8,14].

Моделируя популяционную динамику с помощью дискретных динамических систем (2.1), мы предполагаем, что если точно известен вид отображения f и состояние системы в конкретный момент времени, то мы можем получить точное состояние системы через любой промежуток времени – дать прогноз (напомним, что динамическая система – это математическая идеализация полностью детерминированного процесса). Однако прогноз на длительный промежуток времени невозможен, если система находится на хаотическом аттракторе. Этот факт можно пояснить тем, что начальные данные всегда известны с некоторой погрешностью, которая будет возрастать с каждой итерацией в h_1 раз, становясь сколь угодно большой при длительных промежутках времени. Можно провести несложный компьютерный эксперимент, задав сколь угодно близкие начальные значения для траекторий на хаотическом аттракторе и проследить эволюцию этих траекторий (может быть, даже более наглядным примером будет взять два компьютера с различной разрядной сеткой и задать одинаковые начальные значения).

Изложенные выше соображения привели к понятию горизонта предсказуемости – промежутка времени, для которого возможен динамический прогноз [14]. Обычно считают, что величина T горизонта предсказуемости связана со старшим показателем Ляпунова и выражается формулой

$$T \sim \frac{1}{l_1}$$

2.11 Области притяжений аттракторов динамических систем. Фракталы

При анализе дискретных динамических систем вида (2.1) кроме выяснения числа и характера различных аттракторов важно знать области притяжений этих аттракторов.

Определение 2.16 *Подмножество фазового пространства $U \subset R^n$ динамической системы (2.1) называется областью притяжения (бассейном притяжения) аттрактора V^* , если для любого $N_0 \in U$, $f^k(N_0) \rightarrow V^*$ при $k \rightarrow \infty$.*

Если область притяжения аттрактора совпадает со всем фазовым пространством, то такой аттрактор называется глобальным.

Уже в случае одномерных отображений области притяжений аттракторов могут быть устроены весьма сложно. Рассмотрим следующий

Пример 2.9 Задано одномерное отображение

$$u \mapsto f(u) = \frac{3u - u^3}{2},$$

которое имеет три неподвижные точки $u_1^* = -1$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 1$, причем первая и третья неподвижные точки устойчивы, вторая – неустойчива.

Рассмотрим область притяжения, например, точки u_3^* . С помощью графического анализа (рис.2.14) можно видеть, что интервал $I_1 = (0, \sqrt{3})$ принадлежит области притяжения u_3^* (отметим, что $f(\sqrt{3}) = 0$). Начальные условия, принадлежащие интервалу $I_2 = (-2, -\sqrt{3})$ отображаются в интервал $(0,1)$, следовательно, I_2 так же принадлежит области притяжения точки u_3^* .

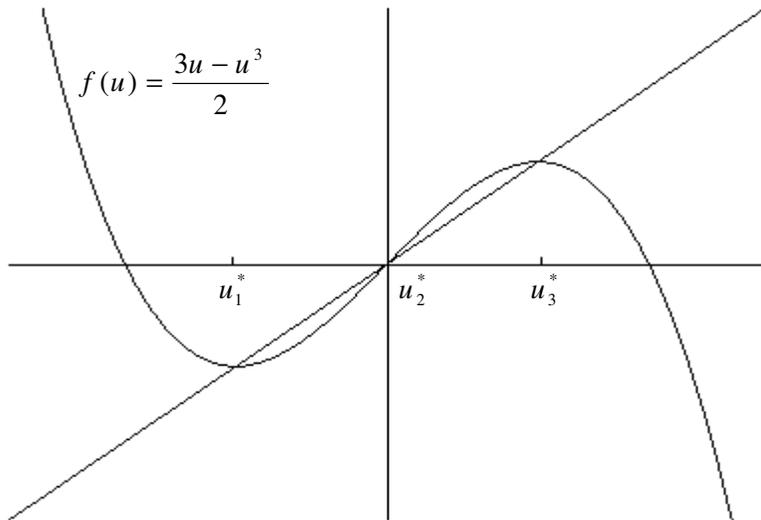


Рис. 2.14 Отображение $f(u)$ примера 2.9, иллюстрирующее сложную структуру области притяжения аттракторов

Рис. 2.14 показывает, что существует интервал I_3 , точки которого отображаются в I_2 , и т.д. до бесконечности.

Следовательно, область притяжения u_3^* представляет собой объединение бесконечной последовательности неперекрывающихся интервалов $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$, длины которых быстро убывают.

В двумерном случае границы областей притяжения могут быть устроены даже более сложно. Этот факт мы проиллюстрируем классическим примером, который привел к появлению новой ветви математики – фрактальной геометрии.

Пример 2.10 (Множества Мандельброта и Жюлиа) Рассмотрим комплексное отображение

$$z \mapsto z^2 + a, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \quad (2.32)$$

Отображение (2.32) есть частный случай двумерной динамической системы вида (2.1) для действительной и мнимой частей z . Рассмотрим задачу: изобразить множество значений параметра a на комплексной плоскости, для которых последовательность z_0, z_1, z_2, \dots является ограниченной, если $z_0 = 0$. Решением этой задачи является множество Мандельброта (рис. 2.13).

На рисунке видно, что граница этого множества сильно изломана, причем при увеличении она будет выглядеть столь же изломанной. Именно это свойство самоподобия Мандельброт назвал фрактальной структурой границы.

Отметим, что отображение (2.32) эквивалентно логистическому уравнению (2.7) – если менять a как действительный параметр, то бифуркации удвоения периода соответствуют прорастанию почек множества Мандельброта (чтобы увидеть взаимосвязь надо расположить рис.2.11 в обратном направлении, тогда существование единственной неподвижной точки логистического уравнения соответствует наибольшей

почке множества Мандельброта, цикла длины два – второй по величине почке и т.д.).

Множество Мандельброта используется для описания бассейна притяжения аттракторов отображения (2.32), которые не являются бесконечностью (т.е. тех

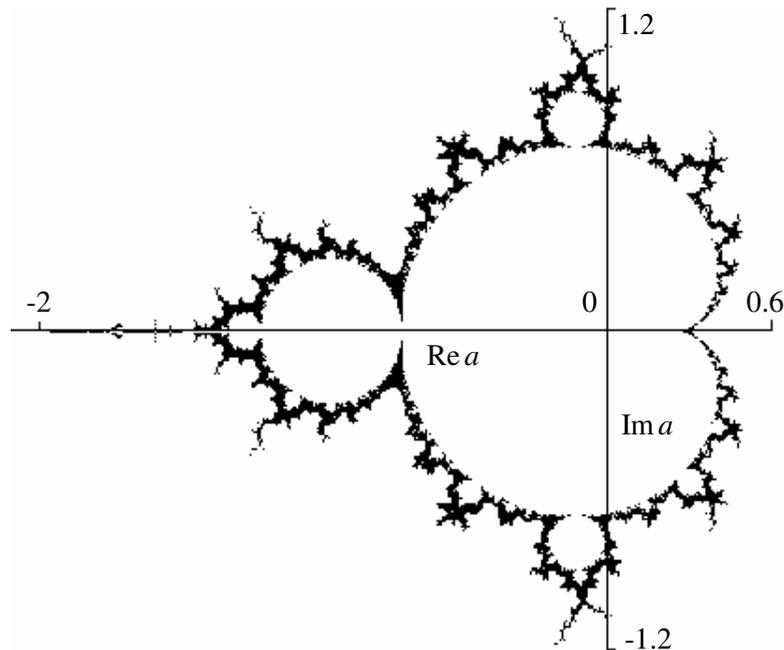


Рис.2.15 Множество Мандельброта отображения $z \mapsto z^2 + a$

областей комплексной плоскости, начальные условия из которых не будут порождать траекторию, стремящуюся к бесконечности). Такие бассейны притяжения аттракторов отображения (2.32), отличных от бесконечности, называются множествами Жюлиа. Если значение параметра принадлежит внутренней области множества Мандельброта, то бассейн притяжения

выглядит достаточно просто (например, если $a = 0$, то это просто окружность). Однако, если приближаться к границе множества Мандельброта, множества Жюлиа приобретают исключительно сложную структуру (рис.2.16).

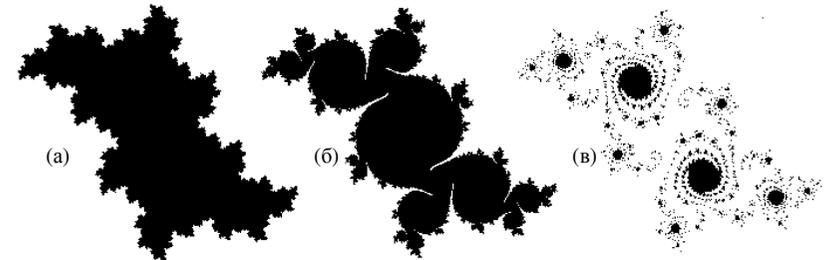


Рис. 2.16 Множества Жюлиа отображения $z \mapsto z^2 + a$ для различных значений параметра. (а) – $a = 0.6i$ (б) – $a = -0.11 + 0.6557i$, (в) – $a = -0.195 + 0.6557i$

Отметим, что внутри самих множеств Жюлиа может существовать несколько аттракторов, геометрия областей притяжения которых так же сложна.

Основной результат приведенных примеров состоит в том, что даже если в динамической системе вида (2.1) существуют только устойчивые неподвижные точки, циклы или замкнутые инвариантные кривые, причем аттракторов несколько, такая система может область сложной динамикой (при малом случайном воздействии на состояние системы возможен скачок в область притяжения другого аттрактора).

2.12 Упражнения

1. Задана многомерная линейная дискретная динамическая система вида

$$u_{t+1} = Au_t,$$

$u_t \in R^n$, A – произвольная действительная постоянная матрица. Доказать следующее утверждения: для асимптотической устойчивости начала координат необходимо и достаточно выполнения неравенств $|\mu_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, где μ_i – собственные числа матрицы A (Указание: воспользоваться приведением матрицы A к Жордановой нормальной форме и рассмотреть все возможные случаи).

2. (Анализ бифуркации Неймарка-Сакера) Проверить, что в уравнении (2.23) примера 2.7 рождающаяся замкнутая инвариантная кривая устойчива (вычислить коэффициент l_1). Проверить условия невырожденности бифуркации Неймарка-Сакера (2.14) для динамической системы (2.26).

3. Показать, что для динамической системы (2.26) невозможна аппроксимация центрального многообразия в виде ряда Тейлора при бифуркационном значении параметра $a = 3$.

4. Рассмотреть дискретную динамическую систему

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ bx + k + yz \\ -\frac{ky}{c+y^2}(bx + k + yz - 1) \end{pmatrix}.$$

Показать, что

i. неподвижная точка этой системы $(1, 1, 1 - b - k)$ бифурцирует через бифуркацию удвоения периода при

$$b_F = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4(c+1)} \right) k,$$

ii. через бифуркацию Неймарка-Сакера при

$$b_{NS} = -\frac{c+1}{c+2},$$

iii. определить направление бифуркации удвоения периода,

iv. показать, что бифуркация Неймарка-Сакера может быть как “жесткой”, так и “мягкой”, в зависимости от значений параметров c, k .

5. Задана дискретная динамическая система в форме

$$N_{t+1} = rN_t f(N_t, P_t)$$

$$P_{t+1} = N_{t+1}(1 - f(N_t, P_t)).$$

Здесь $f(N, P)$ – нелинейная функция, такая, что $0 < f(N, P) < 1$, монотонно возрастающая по N при фиксированном P и монотонно убывающая по P при фиксированном N . Показать, что положительное положение равновесия (N^*, P^*) может существовать и привести необходимые ограничения на параметр r . Показать, что линейная устойчивость этого положения равновесия гарантируется, если корни уравнения $\mu^2 - \mu(1 + rN^* f'_N(N^*, P^*) - N^* f'_P(N^*, P^*)) - rN^* f'_P(N^*, P^*) = 0$ по абсолютной величине меньше одного.

6. Написать программу для вычисления многомерных показателей Ляпунова. Проверить правильность вычислений, сравнив получаемые результаты со значениями показателей Ляпунова для отображения “Колокол лудильщика” (для указанных в примере 2.7 значений параметров $l_1 = 0.19, l_2 = -0.53$). Проверить приведенные в пункте 2.10 результаты вычислений показателей Ляпунова для примеров 2.5 и 2.8.

7. Найти область притяжения бесконечности для

отображения примера 2.9. (Решить неравенство $|f(u) - u_2^*| > |u - u_2^*|$, которое описывает все такие точки u , что расстояние между u и u_2^* меньше, чем расстояние между $f(u)$ и u_2^* .)

8. Доказать следующее утверждение. Пусть $f: R \rightarrow R$ - непрерывное отображение. Если $f(u^*) = u^*$ и $u < f(u) < u^*$ для всех $u \in [a, u^*)$, то $f^k(a) \rightarrow u^*$. Если $f(u^*) = u^*$ и $u^* < f(u) < u$ для всех $u \in [u^*, c)$, то $f^k(c) \rightarrow u^*$. С помощью доказанного утверждения найти области притяжения неподвижных точек отображения

$$u \mapsto f(u) = \frac{4}{\pi} \arctan(u).$$

9. (модель линейно-иерархической конкуренции)

Для модели доказать возможность сосуществования всех видов.

- i. сформулировать условие, которое необходимо на величины параметров a_{ij} , чтобы в системе (2.36) существовала внутренняя неподвижная точка u (т. е. все $u^i > 0$). В этом случае говорят, что система (2.36) подвержена *слабой межвидовой конкуренции*.
- ii. Найти условие, при котором в системе со *слабой межвидовой конкуренцией* возможно сосуществование всех взаимодействующих видов.

10. Провести по возможности полное аналитическое исследование системы (2.37). найти возможные периодические решения малых периодов. Показать, что при значении параметров $r_1 = r_2 = 2.1$, $a = 0.0121$ в системе существует два устойчивых цикла и один неустойчивый, найти эти циклы. Построить бассейны притяжений двух аттрактов в указанном случае.

Литература:

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
2. Ашманов С.А. *Введение в математическую экономику*. М.: Наука, 1984.
3. Братусь А.С., Мещерин А.С., Новожилов А.С. *Математические модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой*. //Вестник МГУ, сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика, №1, 2001. Стр. 23-28.
4. Карев Г.П., Березовская Ф.С., *Дифференциальные уравнения в математических моделях*. М.: МГУ, 2000.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
6. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
7. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. *Введение в синергетику*. М: Наука, 1990.
8. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. *Современные проблемы нелинейной динамики*. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
9. Мардсен Д., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. М.: Мир, 1980.
10. Недорезов Л.В. *Курс лекций по математической экологии*. Новосибирск, 1997.
11. Одум Ю. *Основы экологии*. М: Мир, 1975.

12. Оселедец В.И. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем* //Труды Моск. мат. общества, т.16, 1968. Стр. 179-210
13. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. *Красота фракталов*. М.: Мир, 1993.
14. *Пределы предсказуемости*. Сб. ст. под ред. Ю.А. Кравцова, М.: ЦентрКом, 1997.
15. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. *Математические модели биологических процессов*. М.: МГУ, 1993.
16. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1985.
17. Хлебопрос Р.Г., Фет А.И. *Принятие решений в экономике, экологии, политике. Модели катастроф*. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1999.
18. Шапиро А.П. *Математические модели конкуренции*. В кн.: *Управление и информация*. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, вып. 10, 1974. Стр. 5-75
19. Шапиро А.П., Луппов С.П. *Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии*. М.: Наука, 1983.
20. Шарковский А.Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*. // Укр. мат. журн., т. 16, № 1, 1964. Стр. 61-65
21. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю. *Разностные уравнения и их приложения*. Киев: Наукова думка, 1986.
22. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A. *Chaos. An introduction to dynamical systems*. New-York: Springer-Verlag, 1996.
23. Bratus A., Mescherin A., Novozhilov A. *Mathematical Models of Interaction between Pollutant and Environment* //Proc. Int. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St. Petersburg, vol. 3, 2000, p. 569 – 572
24. Constantino R.F., Cushing J.M., Dennis B., Desharnais R.A. *Experimentally induced transitions in the dynamic behavior of insect population*. //Nature, vol. 375, 1995. p. 227-230
25. Feigenbaum M. *Quantative universality for a class of nonlinear transformations*. //Statistical Physics, vol. 19, 1978. p. 25-52
26. Frisman E.Ya., Last E.V. *Oscillations and chaos in the model of the pacific salmon's number dynamics* //Proc. Int. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St. Petersburg, vol. 3, 2000. p. 573 – 575
27. Frisman E.Ya., Sycheva E.V. *Oscillations and chaos in population dynamics caused by the hunting* //Proc. Int. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St. Petersburg, vol. 3, 2000. p. 576 – 578
28. Grossmann S., Thomae S. *Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes*. //Zeitschr. Naturforschg, vol. 32a, 1977, p. 1353-1363
29. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New-York: Springer-Verlag, 1995.
30. Leslie P.H. *On the use of matrices in certain population dynamics*. //Biometrika, vol. 33, №3, 1945, p. 183-212
31. Leslie P.H. *Some further notes on the use of matrices in population mathematics*. //Biometrika, vol. 35, 1948. p. 213-245
32. Li T.Y., Yorke J.A. *Period three implies chaos*. //American Mathematical Monthly, vol. 82, 1975. p. 985-992
33. Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature*. San-

- Francisco: Freeman, 1984.
34. May R.M. *Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles and chaos.* //J. Theor. Biol., vol. 51, 1975. p.511-524
 35. May R.M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics.* //Nature, vol. 261, 1976, p. 459-467
 36. Murry J. D. *Mathematical biology.* New-York: Springer-Verlag, second edition, 1996.
 37. Ricker W.E. *Stock and recruitment.* //J. Fish. Res. Board Canada, vol. 11, 1954. p.559-663
 38. Snell T., Serra M. Dynamics of natural rotifer populations. //Hydrobiologia, vol. 368, 1998. p. 29-35
 39. Varley G., Gradwell G., Hassel M. *Insect population ecology.* Berkeley: Univ. of Calif. Press, 1973
 40. Verhulst F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems.* New-York: Springer-Verlag, 1996.
 41. Хартман П. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
 42. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. *Экология.* М.:МГУ, 1980

Сводный план 2004 г., позиция 181

Братусь Александр Сергеевич,
Новожилов Артем Сергеевич,
Родина Елена Викторовна

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ

Учебное пособие

Сдано в печать – 21.02.05 Тираж - 100 экз.
Усл. печ. л. Формат 60×84/16 Цена – 61руб.00коп.
Заказ № 156

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа