

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика-1»

Г.А.ЗВЕРКИНА

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Москва — 2005

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика-1»

Г.А.Зверкина

«ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ»

учебное пособие

для студентов специальности
«ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Москва — 2005

Зверкина Г.А. «История математики»: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2005. — 108 с.

В учебном пособии в сжатой форме изложен курс истории математики, включающий в себя историю математики с древности до возникновения исчисления бесконечно малых с приложением обзора развития математики в России. Предназначено для студентов 1 курса специальности «Прикладная математика» по дисциплине «История математики».

Рецензенты:

Д.и.н, к.ф.-м.н. М.М.Рожанская (Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН)

К.ф.-м.н, доцент В.Б.Минасян (Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ))

©Московский государственный
университет путей сообщения
(МИИТ), 2005

Донаучная математика. К донаучной математике относится математика доэллинистического периода, т.е. до того времени, когда начала развиваться математика Древней Греции. Развитие математики до этого времени разделяется на доисторический и исторический периоды. К историческому периоду относят то время развития математики, о котором сохранились письменные свидетельства; а к доисторическому – то время, о котором мы можем судить только по косвенным данным (т.е. по результатам археологических раскопок и культуре современных примитивных народов).

Доисторическая математика. Археологические находки и исследования этнографов позволяют нам судить о первоначальных математических знаниях древнего человека. Люди примитивных племен умели считать и (иногда) имели представление о некоторых геометрических объектах.

Счет. В примитивных племенах он часто сводился к сопоставлению (установлению взаимно-однозначного соответствия) пересчитываемых предметов и имеющегося эталонного набора (кучки камешков, палочек, пальцев на руках и на ногах или частей тела). Вначале название чисел зависело от природы пересчитываемых объектов. Лишь тогда, когда числительные стали независимыми от объекта счета (т.е. для обозначения «двух слонов» и «двух бананов» применялось одно и то же слово-числительное), можно говорить о возникновении системы счета. Различие «именованных» и «отвлеченных» (абстрактных чисел) сохранялось в течении длительного времени, так, в русской математике эти понятия исчезли из школьной программы только в XX веке.

Первые исторически возникшие числительные обозначали числа 1, 2 и «много»; для обозначения больших величин использовались комбинации из 1, 2 и, позднее, слов «рука» (5), «две руки» (10), «человек» (20 – число всех пальцев человека): число 18 могло быть названо как «человек без двух» ($18=20-2$ – субстративный метод от латинского *substractio* – вычитаю) или как «две руки, нога, два, один» ($18=10+5+2+1$ – аддитивный метод, *addition* – складываю). Следы таких систем счета сохранились во многих языках и культурах: для обозначения 2 часто используется несколько синонимов (в русском языке – два, пара, оба); пятерками считали древние инки, китайцы и славяне; во многих языках названия чисел от 11 до 20 строятся иначе, чем следующие числительные; счет двадцатками сохранился во французском языке (80 – *quatre-vingts* – четырежды двадцать; 97 – *quatre-vingt-dix sept* – четырежды двадцать и десять и семь, и пр.). Таким образом, основные исторически возникавшие системы счета имели в своей ос-

нове 5, 10, 20.

Письменный счет. Наиболее древним свидетельством арифметических упражнений человека считается обнаруженный в Моравии кусок кости с 55 насечками, сгруппированными по 5 штук в два ряда (ок. XXXV в. до н.э.). Традиция обозначать числа насечками на кости или на деревянных табличках-бирках сохранялась достаточно долго: в XVII веке лондонский пожар уничтожил огромный массив долговых расписок-бирок с нанесенными на них зарубками-числами. Черточки и точки были первыми числовыми знаками. Однако запись больших чисел таким способом была затруднительна. Стали возникать специальные знаки для обозначения чисел, т.е. системы нумерации, о чем речь пойдет ниже.

Геометрия. Геометрические представления древнего человека начали формироваться тогда, когда люди занялись земледелием и перешли к оседлому образу жизни; видимо, именно к этому времени у человека сформировалось представление о прямом угле и прямой линии. Древний земледелец чаще всего засеивал поле прямоугольной или близкой к прямоугольной форме. Тогда же начали формироваться и более абстрактные геометрические представления: на стенах некоторых пещер – мест стоянок древнего человека – были обнаружены карты, на которых обозначены поля и дороги. Первобытные представления о геометрических объектах наиболее развиты у земледельцев.

Представление о геометрических объектах (прямой, прямом угле, окружности) существовало не у всех древних племен. Например, сохранившиеся в джунглях Африки примитивные племена, живущие собирательством в непроходимых зарослях извивающихся стволов лиан и кустарников, не имели никакого представления ни о прямой линии, ни о перспективе. А другие племена, жившие в саванне и строившие куполовидные жилища, не имели представления о прямом угле.

Некоторые сведения о геометрических представлениях древних людей можно получить из рисунков геометрической и протогеометрической керамики, обнаруживаемой археологами практически во всех частях мира. На керамику наносились орнаменты, состоящие из окружностей и их дуг, и из ломаных и многоугольников.

Геометрические представления и техника счета развивались у древних народов в связи с их хозяйственными потребностями. Наиболее авторитетными в области арифметических операций, например, у древних народов средиземноморья считались финикийцы, которые имели обширные торговые связи, изобрели деньги – эквивалент стоимости товаров – и, естественно, были вынуждены постоянно вести рас-

четы (иногда довольно сложные, например, когда вопрос касался пропорционального распределения капитала или прибыли).

К доисторическому периоду развития математики относится и время возникновения большинства существовавших письменных систем счисления, т.е. правил записи чисел и их долей.

Системы счисления. Исторически складывавшиеся системы счисления имели признаки аддитивности (сложения), субтрактивности (вычитания) и мультипликативности (умножения). Используемая нами сейчас десятичная система счисления использует мультипликативность и аддитивность: например, число 256 следует читать как $2 \times 100 + 5 \times 10 + 6$.

Потребность записи больших чисел привела к изобретению специальных значков для изображения чисел. Для этого использовались специальные значки (глифы) или буквы существовавшего алфавита. Исторически в большинстве случаев системы счисления первоначально (как мы уже видели выше) были аддитивными и субтрактивными. Таковой, например, является римская нумерация, основанная на сложении и вычитании (в зависимости от расположения) численных значений своих знаков: 1=I, 5=V, 10=X, 50=L, 100=C, 500=D, 1000=M. При этом числовая величина знаков I, X, C в зависимости от положения в записи числа могла вычитаться или прибавляться, а именно: если знак стоял справа от большей величины, то он прибавлялся, а если слева – то вычитался ($VIII=5+3=8$, $IX=10-1=9$, $MCDCCIV=1000+(1000-100)+500+100+100+(5-1)=1974$). Только в XV веке благодаря работам Луки Пачоли (1445-ок.1517) в Европе вычисления повсеместно стали производиться в известной нам десятичной системе счисления, построенной на арабских цифрах.

Подобная (чисто аддитивная) система была принята и в древнем

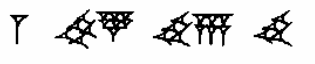
1	10	100	1000	10000	100000	10^6
Египетская нумерация						

Египте. Число изображалось набором знаков, соответствовавших числу разрядов числа. Позднее иероглифическая египетская нумерация, значки которой изображены на рисунке, сменилась иератической, скорописной, – вместо ие-



роглифов писались их упрощенные значки, при этом одним знаком указывался разряд, а другим – число разрядов. Подобным же образом записывались числа в китайской математике, где использовались иероглифы, читавшиеся как слова. В дальнейшем это привело к формированию позиционной десятичной нумерации. Позиционная нумера-

ция использовалась также в математике Майя – там кроме знаков-глифов использовали знаки «» – 0, «» – 1, «» – 5 в записи двадцатеричных чисел (например, $\bullet \cdot \text{III} = 1 \cdot 20^2 + 0 \cdot 20 + 19$). Также позиционная нумерация была изобретена в древней Месопотамии. Для обозначения чисел использовались два знака-клины $\Upsilon = 1 \cdot 60^n$ и $\text{<} = 10 \cdot 60^n$, значение которых зависело от положения его в записи числа. При этом порядок числа (т.е. множитель 60^n) определялся из контекста решаемой задачи.


$1.57.46.40 \cdot 60^n = 424000 \cdot 60^n$

Вавилонская система счисления была позиционной системой – комбинацией десятичной (десятками считались единицы разряда) и шестеричной (шестерками считались десятки).

Позднее она была преобразована в полноценную шестидесятеричную (со специальными знаками для всех чисел разрядов) в греческой и арабской математике. Вавилонская нумерация, однако не имела знака 0, отсутствие разряда обозначалось пробелом, но позднее на месте отсутствующего разряда ставили точку (в греческой версии шестидесятеричной системы 0 обозначался буквой о). Вычислять в шестидесятеричной системе было трудно, и древние жители Месопотамии пользовались многочисленными таблицами (умножения, обратных величин и пр.), сохранившимися на глиняных табличках до наших дней.

Шестидесятеричная вавилонская система счисления дала нам деление 1 градуса (или часа) на 60 минут и 1 минуты на 60 секунд.

Алфавитные системы. Другим типом систем счисления была алфавитная система, где каждой букве алфавита ставилось в соответствие число вида n , $n \times 10$, $n \times 100$ ($1 \leq n \leq 9$). Такая нумерация возникла в древней Греции. Первоначально греческая (архаическая) нумерация походила на римскую и строилась по аддитивному способу $I=1$, $\Gamma=5$, $\Delta=10$, $H=100$, $X=1000$, $M=10000$. Для упрощения записи больших чисел использовались комбинации знаков – $\text{I}^{\text{H}}=50$, $\text{I}^{\text{X}}=500$, $\text{I}^{\text{M}}=5000$. Позднее в обиход вошла ионийская или алфавитная система счисления: все буквы греческого алфавита α , β , γ , δ и т.д. обозначали единицы, десятки и сотни; для этого требовалось 29 букв, а в греческом алфавите было всего 26. Поэтому греки использовали вышедшие из употребления архаичные буквы $\upsilon\alpha\upsilon$ $\zeta=6$, $\kappa\omicron\pi\alpha$ $\zeta=90$ и $\sigma\alpha\mu\pi\iota$ $\zeta=900$. Таким образом, в этой нумерации можно было записать любое число от 1 до 999. Для того, чтобы отличить буквенную запись числа от слова, над числом ставилась черта или перед числом – знак, напоминающий апостроф «'». Для записи тысяч применялись знаки для единиц, отмеченные спереди апострофом или штрихом внизу. Для записи чисел, кратных 10

000, использовалась большая буква М (мириада= $10\ 000$), над которой надписывалось число мириад –

$$^{\lambda\alpha} \text{M} \chi\chi\upsilon\beta = (30+1) \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 600 + 50 + 2 = 313652.$$

С помощью таких обозначений греки могли записать любое число до 10^8 -1. Средство для записи любого сколь угодно большого числа предложил Архимед (ок.287-212гг. до н.э.) в своем трактате «Псаммит» («Исчисление песчинок»). Он предложил способ, с помощью которого можно вычислить число песчинок, помещающихся в сфере, в которой, по мнению древних астрономов, заключен весь мир. Для записи такого огромного числа Архимед предложил использовать «октады», т.е. разряды, в каждом из которых содержится 10^8 единиц. Первый разряд в такой системе нумерации записывается так же, как любое число от 1 до 10^8 -1. 10^8 Архимед называет единицей второго разряда; с помощью чисел второго разряда можно записывать числа вида $n \times 10^8$, $1 \leq n \leq 9999$. Число 10^{16} представляет собой единицу третьего разряда; с помощью чисел второго разряда можно записывать числа вида $n \times 10^{16}$, $n=1 \div 9999$, и т.д. Таким образом, Архимед фактически ввел позиционную систему счисления, один разряд которой содержит 10^8 единиц (при этом Архимед доказал, что $10^{m+n} = 10^m \times 10^n$). Несколько позднее младший современник Архимеда Аполлоний из Перги (ок.262-ок.190 гг. до н.э.) предложил в качестве разряда брать не 10^8 , а 10^4 , т.е. счет «октадами»; он сформулировал правила арифметических действий с записанными таким образом числами, – эти правила эквивалентны ныне существующим правилам действия с десятичными числами.

В позднеллинистический период, когда греки хорошо познакомились с вавилонской астрономией, они вели астрономические расчеты в шестидесятеричной системе счисления, причем числа от 1 до 59 они записывали в ионийской нумерации: $1=\alpha$, $2=\beta$, ..., $58=\upsilon\pi$, $59=\upsilon\varphi$. Для обозначения отсутствующих разрядов иногда ставилась буква о – омикрон. При составлении необходимых в астрономии тригонометрических таблиц Клавдию Птолемею требовалось записывать дробные доли вычисленных характеристик углов, для этого он помечал эти разряды 1, 2 или 3-мя штрихами, указывающими их значение (позднее штрихи сменились на римскую нумерацию). Например, $\alpha \beta^I \gamma^{II} \delta^{III} \varepsilon^{IV} = 1 + 2/60 + 3/60^2 + 4/60^3 + 5/60^4$.

Благодаря тесным связям с Византией греческая буквенная нумерация была практически дословно повторена в славянской (древнерусской) нумерации: А=1, В=2, Г=3, ... Буква Б в этом числовом ряду отсутствует, т.к. в греческой нумерации ее не было; буква $\upsilon\alpha\upsilon$ со време-

нем трансформировалась в букву «зело», которой изначально в кириллице не было. Буква коппа трансформировалась в Ч. А буква сампи, уже к IX веку трансформировавшаяся в Византии в знак **Λ**, в русской нумерации превратилась в «юс малый» – **Λ**. При этом «юс малый» неоднократно менял свое значение, постоянно, впрочем, оставаясь в конце списка букв-цифр.

Для обозначения чисел высших разрядов в русской нумерации применялись значки сверху и вокруг букв-цифр: **А**=1000 = тысяща, **Ⓐ** – 10^6 =тысяща тысяч = тьма, **Ⓐ** – 10^{12} = тьма тём= легион или неведий, **Ⓐ** = 10^{24} = легион легионов = леодр, **Ⓐ** = 10^{48} = леодр леодров = ворон, **Ⓐ** = 10^{49} = колода, «и более сего несть человеческому уму разуметь». Впрочем, и 10^{12} – «легион» или «неведий» уже своим названием говорит о том, что в обыденной жизни такие числа не встречались и даже представление о них на древней Руси было как о чем-то фантастическом. Когда расширились связи России с Западной Европой, построение чисел высших разрядов стало не мультипликативным, а аддитивным: легион= 10^9 , леодр= 10^{12} , ворон= 10^{15} .

Возникновение десятичной системы счисления. Как мы знаем, практически у всех народов мира десяток (число пальцев на руках) играл важную роль в системах счисления. Даже в недесятичных системах записи чисел десятка так или иначе присутствовала: имелись обозначения для чисел, кратных 10, 100 и т.д.. Китайская нумерация, также десятичная, была основана на мультипликативном принципе. Форма китайских иероглифических цифр, возникших во II тысячелетии до н.э., установилась к III в. до н.э.: имелось 13 иероглифов для знаков 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, 10000. Эти иероглифы применяются и в настоящее время и имеют тот же вид, разряды записываются сверху вниз или слева направо. В древности при записи больших чисел указывались разряды и число этих разрядов (например, 5-10000-6-1000-7-100-8-10-5-6-7=5678567), т.е. все было готово к введению позиционной нумерации, не хватало лишь знака 0. Однако в Китае существовала и другая «научная» нумерация, возникшая в результате применения счетных досок, на которых в клетках раскладывались палочки: вертикальная обозначала 1, а горизонтальная – 5; при переносе вычислений на бумагу пустые клетки обозначались знаком $\circ$: $\text{|||}\circ\text{—}\text{—}\text{—}=3007$. «Научная» и «бытовая» иероглифическая системы и дали толчок к возникновению позиционной нумерации. Когда в Китае были изобретены отрицательные числа, палочки стали делать двух цветов – красные и черные или с различными сечениями – квадратным и треугольным. Используя

счетные доски (иногда несколько сразу – не хватало ширины), китайцы могли записывать числа от 10^{-128} до 10^{128} ; для обозначения чисел нулевого разряда (1, 2,..., 9) использовался центральный столбец таблицы, левее него записывались десятки, сотни, тысячи и т.д., а правее – десятые доли, сотые доли, тысячные доли и т.д.. То есть это фактически было то, что теперь называется десятичной записью дробей.

Но привычная нам десятичная запись чисел возникла в Индии. Счет целых чисел в Индии с древних времен носил десятичный характер, при этом в санскрите существуют названия для 10^n до $n \leq 50$. Как и в других цивилизациях, индийцы использовали для записи чисел глифы, затем буквы, слоги, но к VI в. в Индии формируется (возможно, под влиянием китайской культуры) десятичная цифровая система записи чисел, отличающаяся от современной только формой знаков. Поскольку многие научные трактаты писались стихами, то и цифры имели по несколько разных поэтических названий, например: 0 – «пустое», «дыра», «небо»; 1 – Луна, Земля; 2 – «близнецы», «глаза», «ноздри», «губы»; 4 – «океаны», «стороны света» и т.п.. Например, в научной поэме 1021 называлось «Луна-дыра-крылья-луна». При переводе индийских сиддхант на арабский язык название нуля было переведено как «сыфр» – пустота, в Европе при переводе на латынь получилось *cifra*; десятичная нумерация, называемая в Европе арабской, у арабов носит название «индийского счета».

В странах арабского Востока бытовало две системы нумерации: буквенная, аналогичная древнегреческой («абджад», от названия первых четырех цифр – алиф, ба, ждим, дал или «джумал», «суммы», поскольку число представляло собой сумму значений знаков) и десятичная позиционная, заимствованная у индийцев. Десятичная нумерация в Европе впервые появилась в книге Мухаммада ал-Хорезми (787-ок.850) «Об индийском счете». Кроме того, в арабских странах в научных расчетах использовалась, как и в позднеллинистической Греции, шестидесятеричная система. Вычисления в шестидесятеричной системе были приняты в среде ученых и астрономов арабского Востока, в обиходе пользовались «индийским счетом» – десятичной нумерацией.

В XIII веке пришедшая из стран Востока и потому называемая «арабской» нумерация уже достаточно широко распространена в Европе, однако все правовые документы и торговые расчеты должны были вестись в традиционной римской нумерации. (Поэтому купцы часто имели две бухгалтерии – с использованием удобного арабского счета и с римскими цифрами – для отчета перед государственными чиновниками.) Только после того, как Лука Пачоли (1454-ок.1514) опубликовал

книгу «Сумма знаний по арифметике, геометрии, учение о пропорциях и пропорциональность», одна из частей которой, «Книга о счетах и записях», была посвящена изложению методов бухгалтерского учета с большим количеством числовых примеров, записанных в арабской системе счисления, торговцы и предприниматели быстро перевели все свои бухгалтерские книги на десятичную систему. До этого Леонардо Фибоначчи, издавший в 1202 г. «*Liber abaci*», указывал на преимущества позиционной нумерации. Введению в обиход десятичной нумерации способствовали также немецкий математик Михаил Штифель (1487-1567) и Герберт из Орийака (папа Сильвестр II, 999-1003).

Шумеро-Вавилонская математика. Мы называем культуру древнего Двуречья, образованного Тигром и Евфратом, вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Двуречье называют также Месопотамией (от греческих слов μέσος – средний, ποταμός – река, т.е. Междуречьем). Однако первоначально эта культура возникла не в Вавилоне, а значительно южнее, на берегу Персидского залива. В дельте Тигра и Евфрата еще в IV тысячелетии до н.э. возникли шумерские города Ур, Урук (библейский Эрех), Лагаш и Ларса. Севернее жили семиты аккадцы, главным городом которых был Аккад. Основа культуры Двуречья была заложена шумерами – они изобрели клинописное письмо, при котором буквы выдавливаются в виде нескольких клиньев деревянной палочкой на сырой глине, подвергаемой затем обжигу. Это письмо впоследствии было приспособлено к своим языкам вавилонянами, ассирийцами, хеттами, персами и предками армян – урарту. На всем протяжении истории древней Месопотамии племена горских северных народов совершали набеги на благополучный земледельческий юг, и затем, оседая здесь, ассимилировались и принимали местную письменность и обычаи. Однако они продолжали верить в богов, живших на вершинах их родных гор, и потому они сооружали жилища для богов на равнине. Шумерские зиккураты – «храмы неба», многоступенчатые сооружения на искусственных холмах, – были прототипами знаменитой Вавилонской башни.

Государства Двуречья переживали многие взлеты и падения. Там начались регулярные астрономические наблюдения, сведения о которых сохранились до настоящего времени в текстах александрийских астрономов. В 538 г. до н.э. Двуречье захватывает персидский царь Кир, а в 336 г. до н.э. – Александр Македонский, после смерти которого этот регион становится одной из областей эллинистического государства Селевкидов. Во II в. до н.э. Вавилон уже был мертвым городом и лежал в руинах, но вавилонская математика и особенно астрономия еще продолжали развиваться. К эпохе Селевкидов относятся некоторые важные тексты. Несмот-

ря на то, что до нашего времени сохранился большой массив математических табличек, посвященных практическим расчетам, эти таблички историей математики изучены мало.

В противоположность учебным табличкам, сохранившиеся многочисленные результаты расчетов шумерских чиновников не содержат пояснений к решению задач. А спектр решаемых чиновниками (обязательно обучавшимися математике) задач был очень широк. Чиновникам требовалось умение рассчитывать финансовые потоки (проценты по ссудам, налоги, оплату труда и пр.), производить геометрические измерения, вычислять площади и объемы, и т.п.. Сохранились огромные массивы предварительных расчетов-смет при строительстве ирригационных сооружений, оценивающие объемы земляных работ, количество занятых рабочих, расходы на их питание и пр.; по ходу работ и по завершении строительства эти расчеты повторялись.

О теоретических исследованиях вавилонских ученых, приведших к созданию использовавшихся на практике математических методов, ничего не известно. Тем не менее, эти методы стояли на достаточно высоком уровне: вавилонские математики умели решать квадратные уравнения, знали приближенное значение π и характеристик правильных многоугольников, были первыми, кто ввел в обращение позиционную (комбинацию десятичной и шестеричной) систему счисления.

При этом вавилонская математика в основе своей была прикладной наукой (как, впрочем, и практически все остальные области знания древности). Все использовавшиеся вавилонскими математиками факты (полученные эмпирически либо дедуктивно – судить об этом на основании имеющихся у нас данных невозможно) носили утилитарный характер и были нужны для практических расчетов.

Если смотреть с точки зрения прикладных математических методов, то из вавилонской математики древнегреческой было почерпнуто сравнительно немного, в сравнении с вкладом в древнегреческую математику египетской науки, о чем пойдет речь в дальнейшем.

Интерес с точки зрения арифметических методов представляет в первую очередь так называемый **метод Герона** приближенного вычисления квадратных корней из неквадратных чисел, систематически применявшийся вавилонскими математиками. Этот метод, как известно, заключается в следующем.

Имея приближенное значение $\sqrt{A} \approx a_0$, следующее (лучшее) приближение вычисляется по формуле $\sqrt{A} \approx a_1 = (a_0 + A/a_0)/2$. Метод Герона можно интерпретировать как применение метода простой итера-

ции к уравнению $x=(x^2+A)/(2x)$, имеющему решение $x = \sqrt{A}$.

Метод простой итерации позволяет решать уравнение $y=f(x)$ в том случае, когда наклон графика этой функции в окрестности точки пересечения графика $y=f(x)$ и прямой $y=x$ находится в пределах от $-\pi/4$ до $+\pi/4$. Метод заключается в следующем: взяв полученное подбором или из каких-либо других соображений приближенное решение x_0 уравнения $y=f(x)$, его подставляют в функцию $f(x)$, тогда полученное число $x_1=f(x_0)$ получается лучшим, чем x_0 , приближением решения уравнения $y=f(x)$. Если эту операцию повторять много раз, то получится последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_k=f(x_{k-1})$, члены которой все ближе и ближе приближаются к решению уравнения $y=f(x)$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению уравнения $y=f(x)$. Таким образом можно найти сколь угодно близкое к решению уравнения число. В древнем Вавилоне применяли и одну, и несколько итераций метода Герона.

Метод простой итерации (и его модификации, в том числе и метод Герона) – это один из наиболее активно применяемых сейчас при машинном решении задач метод; он «запаян» в программное обеспечение практически всех компьютеров и калькуляторов.

Другим важным вкладом вавилонян в математику является открытие метода линейной интерполяции (т.е. замены неизвестной или очень сложной функции на некоторых интервалах линейной функцией) в практике составления астрономических таблиц. Позднее сообщение об этом методе мы находим у Гемина Родосского (I в.н.э.).

Арифметика. При вычислении в 60-ричной системе деление на числа, не являющиеся делителями 60, дает периодические дроби, что вызывало существенные затруднения в счете. Поэтому для деления были составлены таблицы приближенных значений обратных величин – $1/n$. Для того, чтобы поделить число на n , его просто надо было умножить на приближенное значение $1/n$ из таблицы (при этом вавилоняне не были озабочены правильной постановкой в ответе запятой, отделяющей целую часть от дробной). Имелись также многочисленные таблицы умножения чисел от 1 до 60; правда, такие справочники были очень тяжелыми.

В конце прошлой – начале новой эры в вавилонской нумерации появился значок – точка или маленький кружок, указывавший на свободный, не занятый разряд числа – прообраз нуля.

Кроме того, вавилоняне умели решать ряд арифметические задач (в том числе на арифметические и геометрические прогрессии), неопределенные (т.е. имеющие много решений), квадратные и линейные уравнения.

Геометрия. В области геометрии несомненным вкладом является открытие вавилонянами так называемых «пифагоровых» треугольников, т.е. прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами. Возможно, именно из Вавилона получила сведения о таких треугольниках египетская наука, из которой они стали известны грекам.

Еще один важный факт, известный вавилонянам, – а именно понятие подобия треугольников (пока только в отношении прямоугольных) и связанное с ним свойство пропорциональности, – оказал на греческую математику в самом начале ее развития чрезвычайно важное воздействие; подробнее об этом будет сказано ниже.

Вавилоняне знали объем пирамиды с квадратным основанием и углам между гранями и основанием равным 45° – возможно, они определили этот объем, «разрезав» куб на шесть равных пирамид. Кроме того, им был известен объем усеченной пирамиды – возможно, для того, чтобы его вычислить, вавилоняне преобразовывали усеченную пирамиду в параллелепипед и маленькую пирамидку, отсекая боковые грани вертикальными плоскостями посередине, перпендикулярно сторонам основания. Получившиеся детали переворачивались вверх таким образом, чтобы образовался параллелепипед, а лишние куски составляли пирамидку.

Вавилоняне умели находить точно и приближенно площади различных плоских фигур, и с помощью геометрических построений умели решать некоторые алгебраические задачи, например, такую: известен периметр и площадь прямоугольника – найти его стороны (эта задача сейчас сводится к квадратному уравнению) – такие задачи известны из учебных табличек.

Способы решения задачи усваивался на большом количестве однотипных примеров, – после многократного повторения решений одинаковых задач ученик запоминал необходимый порядок действий, но неясно, понимали ли ученики, на основании какого принципа или метода решалась задача.

Многие задачи сопровождалась обратными – для проверки правильности решения задач. Возможно, именно так и возникли многие алгебраические задачи древних вавилонян: например, найдя площадь и периметр прямоугольника, ученик сразу же решал обратную (более сложную) задачу.

О владении вавилонянами достаточно обширными познаниями в математике косвенно сообщает древний историк Геродот, рассказывая о реализованных ими грандиозных проектах по землеустройству: изменение русла рек, создание искусственных каналов и насыпей.

Математика древнего Египта. Историю Египта исчисляют со времени основания Раннего царства (ок. 3000 г. до н.э.). Около 2700 г. до н.э. возникло Древнее царство со столицей в Мемфисе (Меннефер), вблизи нынешнего Каира. Древнее царство сменилось Средним, затем произошло нашествие варваров – гиксосов, выходцев из Аравии. После изгнания гиксосов начинается Новое царство. Египет ведет войны с народами Месопотамии (хеттами и сирийцами), и в 670 г. до н.э. Египет завоевывает ассирийский царь Асархаддон. В 655 г. до н.э. фараон Псамметих I, опираясь на греческих наемников, изгоняет ассирийцев и основывает последнее самостоятельное древнеегипетское царство. В благодарность грекам Псамметих позволяет им селиться в Египте, и в дельте Нила образуется греческий город Навкратис. Дальнейшая история Египта – время упадка страны и господства иностранных завоевателей, сначала эфиопов, затем ассирийцев и персов. В 525 г. до н.э. Египет захватывается персидским царем Камбизом, а в 332 г. до н.э. – Александром Македонским, основавшим в устье Нила Александрию, которая после смерти Александра становится столицей эллинистического государства Птолемеев. После этого начинается процесс плодотворного синтеза греческой и египетской культур. Александрия становится крупнейшим центром науки наступающей эпохи эллинизма, и она сохраняет это значение еще долгие века спустя после завоевания Египта Римом (30 г. до н.э.).

Говорить о вавилонской и египетской математиках как о двух независимо развивавшихся областях знания, невозможно: начало контактов шумерской и египетской математики имеет достаточно древнее происхождение. Археологи находят многие параллели в культуре Египта и Месопотамии; сохранились письменные свидетельства о контактах египтян и хеттов в середине 2 тысячелетия до н.э.; египетские и месопотамские властители заключали междинастические браки.

Большинство математических текстов, сохранившихся в памятниках древнего Египта, написаны на папирусе – бумаге, выделанной из стебля одноименного растения.

У нас нет почти никаких известий о математических знаниях Раннего и Древнего царств. Сохранились только числовые записи и рисунки на каменных плитах и стенах, свидетельствующие, что художники умели изображать предметы в уменьшенном масштабе с помощью квадратных сеток. Однако, хотя подробности научного развития неизвестны, мы знаем, что на протяжении III тысячелетия до н.э. существовали развитая письменность, нумерация и метрология, на основании астрономических наблюдений был разработан календарь (год = 12 ме-

сяцев × 30 дней + 5 дней). Это было время строительства пирамид, которые относят к семи чудесам мира. О математических знаниях египтян можно судить также по уровню развития хозяйства, техники и архитектуры.

Об египетских ученых (=жрецах) как учителях первых древнегреческих математиков неоднократно сообщают различные античные источники. Однако из собственно египетских письменных источников о математике древнего Египта нам практически ничего не известно. Исследователи располагают лишь двумя относительно полными источниками – большим папирусом Ринда, написанным писцом Ахмесом, и большим, но неполным Московским папирусом, относящимися к XIX веку до н.э.. Математический материал этих папирусов представляет собой сборник приемов решений различных задач, а также правила арифметических действий. Имеются также несколько других отрывков, с задачами большей частью из обыденной жизни (они содержат таблицы $2/n$, n – нечетные числа до 21; задача, которую можно решить с помощью линейного уравнения; упоминается извлечение квадратного корня; приводится счет стоимости домашней птицы в утках, принятых за единицу – видимо, в фискальных целях); также известна задача о разделении квадрата на два, находящихся в заданном отношении, что соответствует решению квадратного уравнения.

Уже первые исследователи древнеегипетских математических текстов обнаружили в них достаточно развитые математические методы.

Для того, чтобы оценить уровень развития египетской математики, надо представлять себе состояние науки в Египте до VII века до н.э., т.е. до того времени, когда греки впервые получили доступ к египетским знаниям.

Прежде всего, в Египте существовали научные школы. Научные исследования и обучение проходили в так называемых «Домах жизни», создававшихся при храмах в крупных центрах страны и имевших в своем составе библиотеку. Деятельность «Домов жизни» была весьма разносторонней: из них появились многочисленные тексты магического, медицинского, астрономического содержания и пр.; персонал «Домов жизни» состоял из специалистов высокого класса различной специализации, которыми создавалась значительная часть ценностей египетской цивилизации; в «Домах жизни» переписывались, редактировались и комментировались трактаты предшественников, а также создавались новые тексты. По организационной структуре Александрийский Музейон был подобен «Домам жизни». Из богатого наследия египетской науки наиболее полно сохранились медицинские трактаты, в пер-

вую очередь, видимо, по причине своей широкой распространенности в быту. Прочие научные сочинения, хранившиеся в архивах и библиотеках при храмах и впоследствии составившие часть коллекции Музейона, погибли в известном Александрийском пожаре.

Система образования Египта включала в себя достаточно глубокое изучение математики. Писцы (=чиновники) должны были уметь производить объемные арифметические вычисления, а также владеть правилами вычисления числовых характеристик геометрических объектов.

Естественно, что в дошедших до нас учебных математических папирусах математические сведения излагались безо всяких доказательств и выводов. Однако изложенные в учебных папирусах факты позволяют говорить о достаточно высоком уровне развития египетской математики уже в XIX в. до н.э.

Геометрия. Говоря о египетской геометрии, естественно упомянуть «египетские треугольники» – прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами, известные и в Месопотамии. В землемерной практике знание таких треугольников позволяло с помощью шнура с завязанными на нем на равном расстоянии узлами размечать прямые углы земельных участков.

Египтяне знали хорошее приближение $\pi \approx 3,16$ ($S=(8d/9)^2$), а правило вычисления объема усеченной пирамиды с прямоугольным основанием, которое можно представить как $V=(a^2+ab+b^2) \times h/3$, где a и b – стороны оснований пирамиды, а h – ее высота, по своей элегантности превосходит правило, выведенное Героном Александрийским (I в. н.э.) в «Метрике» (видимо, опираясь на вавилонскую традицию).

Герон предлагал следующую процедуру: Найти полусуммы сторон верхнего и нижнего основания усеченной пирамиды и вычислить площадь фигуры с такими сторонами, подобной основаниям. Найти разности сторон нижнего и верхнего основания усеченной пирамиды и вычислить $1/12$ площади фигуры с такими сторонами, подобной основаниям. Сложить эти величины и умножить на высоту. Т.е. для квадратной пирамиды получится: $S=h \cdot ((a-b)^2/12 + ((a+b)/2)^2)$, где a и b – стороны оснований. Доказательство этой формулы Герон строит с помощью рассечения пирамиды вертикальными плоскостями на призмы и пирамиды.

Однако для площади четырехугольника египтяне применяли приближенную формулу: $((a+c)/2) \cdot ((b+d)/2)$, что, кстати, дает хорошую точность для близких к прямоугольнику фигур.

Разнообразие решаемых в египетских папирусах задач и методов их решения говорит о достаточно высоком уровне развития математи-

ческих методов в египетской науке уже в XIX в. до н.э.. Видимо, позднее египетскими учеными исследовались и решались новые математические проблемы (скорее всего, прикладного характера). Однако и задолго до XIX в. до н.э., во времена Четвертой династии, когда была сооружена пирамида Хеопса (Хуфу, 2589–2566 до н.э.), т.е. в XXVI в. до н.э., египтяне должны были уметь производить достаточно сложные арифметические расчеты и оценки длин, объемов и площадей, что было необходимо для планирования и обеспечения материалами и рабочей силой грандиозных строительных работ. Известны и другие сооружения древнеегипетских зодчих, требовавшие от них знания более развитой математики, чем та, которую можно представить по дошедшим до нас текстам «чисто математических» папирусов.

Пирамиды. Известно, что во многих культурах в самых различных местах земного шара строились культовые сооружения в виде усеченных четырехугольных пирамид (например, в Ассирии, Китае и Мексике). Так же и в древнем Египте до Четвертой династии сооружались четырехугольные усеченные пирамиды, ориентированные по сторонам света. Однако ни в одной из древних цивилизаций, кроме Египта, не возводились неусеченные четырехугольные пирамиды. Постройка неусеченной пирамиды требует гораздо большей точности, чем сооружение усеченной. Четырехугольные усеченные пирамиды не обязаны быть (и на практике не были) правильными; построение же неусеченной пирамиды требовало умения свести четыре плоскости граней пирамид в одной точке.

Первые ступенчатые пирамиды (ступенчатые башни) появились в Египте во время Третьей династии. Самая большая из них принадлежит фараону Джосеру (2667–2648 до н.э.) и примечательна тем, что является собой первый пример каменной кладки. Ее сооружение приписывается жрецу и архитектору Имхотепу, который был также и советником Джосера. Позднее египтяне обожествляли Имхотепа, а греки отождествляли его со своим богом врачевания Асклепием; он был объявлен мудрейшим из людей и причислен к сонму бессмертных. В дальнейшем были возведены несколько других ступенчатых пирамид.

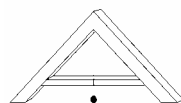
Фараоны Четвертой династии возводили уже пирамиды правильной формы. Первый фараон Четвертой династии Снофру (2613–2589 до н.э., отец Хеопса) возвел две правильные пирамиды на квадратном основании, одна из них называлась «ломаная» из-за изменения угла наклона стены на половине высоты, она представляет собой две усеченные прямоугольные пирамиды, поставленные друг на друга. Интересно, что обе эти усеченные пирамиды правильные. Полагают также, что

египтяне пытались преобразовать начатую во времена Третьей династии ступенчатую пирамиду в Медуме в пирамиду правильной формы.

Видимо, именно в это время древнеегипетскими учеными (=жрецами) был обнаружен необходимый для постройки правильных пирамид факт, а именно то, что углы при основании у равнобедренного треугольника равны. Вероятно, этот факт использовался и при постройке «ломаной» пирамиды.

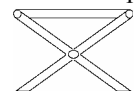
Как уже говорилось, сооружение завершенной пирамиды на квадратном основании существенно сложнее сооружения треугольной или усеченной пирамиды. Необходимо так направить четыре боковых ребра пирамиды, возводимых снизу вверх, чтобы они пересеклись в одной точке. Для сооружения пирамид правильной формы необходимо было, чтобы ее вертикальные диагональные сечения являлись равнобедренными треугольниками.

Для постройки правильной пирамиды необходимо было умение измерять и сравнивать углы, которые образовывали ребра пирамиды с основанием. С целью откладывания равных углов ими применялся термин *segt* или *sqt*, в посвященных вычислению пирамид задачах папируса Ринда он одинаково выражает и синус и косинус угла и его тангенс. Этим термином, например, обозначали число локтей, на которое изменится высота, если пройти вдоль угла на 1 локоть.



В строительной практике египтяне треугольный ватерпас, т.е. им были известны свойства равнобедренного треугольника.

Кроме того, использование раскладных стульчиков, подобных современным туристическим, свидетельствует об их знакомстве со свойствами параллельных прямых и их секущих, а также вертикальных углов и подобием или равенством равнобедренных треугольников (возможно, лишь на эмпирическом уровне). Подобные же столы и стулья имелись и в Месопотамии.



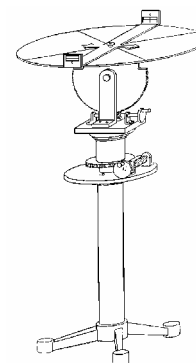
Учитывая время создания первых правильных пирамид, можно отнести практическое использование свойств равнобедренного треугольника ко времени творчества Имхотепа (XXVII в. до н.э.) – выдающегося зодчего и жреца (=ученого).

Таким образом *египтянам не позднее XXVI в. до н.э. были известны равнобедренные треугольники, подобие или равенство таких треугольников, представление о параллельных прямых и их секущих. Строившие пирамиды египтяне должны были знать о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, и, видимо, уже тогда они*

ввели числовые характеристики углов.

Не вызывает сомнений также то, что египтяне умели фиксировать числовые характеристики углов в астрономических исследованиях: без этого они не смогли бы в храме Рамзеса II (1279–1213 гг. до н.э.) таким образом расположить световое окно, что солнце освещает фигуру фараона в строго определенные, заранее вычисленные дни. Это подтверждается также и наличием в пирамиде Хеопса каналов небольшого сечения, ориентированных на определенные точки небосвода, имеющих сложную форму. Также сложна была конфигурация других полостей пирамид; по сообщениям древних, часть из них в период постройки использовалась как астрономический инструмент. Перенос столь сложной системы полостей с точной ориентацией с чертежа на строящийся объект требовал достаточно ясного представления о подобии геометрических фигур, а также умения измерять и переносить углы.

Знаменитая Пирамида Хеопса высотой 147 метров построена над скалистым выступом, который не позволял во время стройки просматривать весь квадрат основания пирамиды. Однако основание пирамиды практически горизонтально: отклонение от горизонтали 6 и 14 мм, т.е. уклон составляет 1:38 000 и 1:16 500. Правильная форма основания го-



ворит о том, что египтяне владели достаточно эффективными методами геодезической съемки и разметки территории. Как они это делали? – Возможно, методами, близкими описанным много веков спустя Героном Александрийским в трактате «О диоптре» (I в. н.э.) с помощью прибора, подобного греческой диоптре – прообразу современного теодолита. Подобные (но более простые) приборы были реконструированы археологами.

Возможно, при разметке основания пирамиды Хеопса был использован прототип прямоугольной системы координат, которым пользовался Герон? Или использовался какой-то другой прием? В пользу использования прямоугольной сетки при переносе чертежа на местность говорят обнаруженные археологами рисунки с нанесенной на них прямоугольной сеткой для переноса изображения на другую плоскость с изменением масштаба. (Кстати, позднее в древнем Риме поля размечались тоже прямоугольной сеткой: название поля состояло из указания двух расстояний от центральной метки – сколько квадратов на север или на юг, и сколько квадратов на восток или на запад.)

Вообще говоря, начало регулярного использования прямоуголь-

ной сетки в геодезических и землемерных работах можно отнести к тому времени, когда города начали строиться по заранее составленному плану (чаще всего представлявшего собой сеть перпендикулярно расположенных улиц). Так была спроектирована шумерская Ниневия; египетские храмы также имели прямоугольную планировку.

Т.е. египтяне использовали в практических приложениях прямоугольную координатную сетку.

О высоком уровне использования математики в проектировании и строительстве сооружений говорит и тот факт, что под пирамидой Хеопса пробит тоннель под углом $26^{\circ}31'23''$ к горизонту, который ведет к центру пирамиды, к скалистому основанию, на котором она покоится, и дальше вглубь на 105,15 метра. Затем он меняет направление на горизонтальное и идет так 8,83 метра перед тем, как окончиться ориентированной по сторонам света погребальной камерой.

Вообще ориентация захоронений по сторонам света характерна для большинства культур древности. Однако все такие захоронения (как и каменно-земляные гробницы египетских фараонов – мастабы – до Третьей династии) производились «открытым» способом. Т.е. открытая ориентированная по сторонам света гробница закрывалась сверху грунтом, камнем или другим материалом. В пирамиде Хеопсы встречаемся со случаем захоронения, к которому был прорыт в скальной породе достаточно длинный ход, и ориентация гробницы оказалась правильной. Для выполнения таких подземных работ требовалась развитая техника геодезической разметки и тонкие математические расчеты.

Такая подземная гробница не одна – в долине Саккара в трех извилистых подземных лабиринтах, называвшихся римлянами Серапеумами, расположены саркофаги мумий священного быка Аписа, также ориентированные по сторонам света. Это грандиозное подземное сооружение с огромными каменными саркофагами для мумий быков. Всего таких захоронений было обнаружено 64. Подземные ходы лабиринтов имеют высоту около 5,5 метров и включают как прямолинейные отрезки, так и повороты, и спуски в погребальные камеры. Кроме того, в скалистой гряде Ливийских гор напротив Фив находится большое количество захоронений поздних эпох, например, в знаменитой «Долине царей». К ним в скальной породе пробиты длинные извилистые тоннели, и, тем не менее, захоронения ориентированы по сторонам света. В последнее время в археологических раскопках в Египте были обнаружены захоронения чиновников, расположенные на глубине 12 метров в скальной породе и строго ориентированные по сторо-

нам света. Сложность сооружения такого подземного сооружения с непрямым ходом, ведущим к нему с поверхности, очевидна. Напомню, что тогда не был известен компас. О подземных лабиринтах и других сложных инженерных сооружениях египтян также сообщает древний историк Геродот.

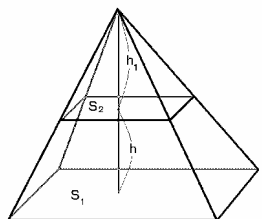
Из всего этого напрашивается вывод об использовании древнеегипетскими зодчими различных математических методов в геодезической съемке и разметке подземных тоннелей: для этого надо было уметь использовать на практике *подобие и равенство прямоугольных треугольников*.

В один ряд с созданием подземных тоннелей в древнем Египте можно поставить знаменитый тоннель Евпалина на острове Самос. Этот тоннель описан Геродотом и найден в указанном им месте в 1832 году. Он имеет в длину около 1 километра и, что примечательно, был пробит одновременно с двух сторон; расхождение тоннеля в месте встречи составило менее 10 метров по горизонтали и 3 метров по вертикали. Во время постройки тоннеля к нему были пробиты вертикальные шахты для удаления породы. Другая часть тоннеля вписана в рельеф местности, что также невозможно без использования методов, подобных триангуляции (сопоставления чертежа и местности с помощью равных или подобных треугольников). Датируется тоннель периодом около 530 года до н.э., когда тиран Поликрат повелел построить этот тоннель. Это время, когда Пифагор (ок.569–ок.475 гг. до н.э.) покинул Самос, т.е., когда греческая математика пребывала в зачаточном состоянии. Возможно, именно с помощью египетской или подобной ей науки был построен этот туннель?

Подобная форма возводимых египтянами пирамид приводит к выводу о знании ими подобия не только прямоугольных треугольников, но и других фигур. При подсчете необходимых при возведении пирамид подсчетах объема работ они должны были прийти к выводу о том, что объемы пирамид относятся как кубы их линейных размеров. Нельзя также отрицать возможность дедуктивного получения этого факта. Здесь мы обратимся к египетскому правилу вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями $V=(a^2+ab+b^2)\times h/3$. Каким образом египтяне могли получить это правило? Ряд исследователей полагает, что египтяне вычисляли объем усеченной пирамиды с одним перпендикулярным основанием ребром, рассекая эту пирамиду плоскостями на четыре неусеченных пирамиды, объемы которых известны; затем полученное правило вычисления объема распространялось на произвольную усеченную пирамиду. Однако в этом случае

придется признать, что египтяне использовали *принцип Кавальери* (Бонавентура Кавальери, 1598–30.11.1647). С тем же успехом можно было бы рассечь правильную усеченную пирамиду вертикальными плоскостями, проходящими через стороны верхнего основания: получится один прямой параллелепипед со сторонами b , b , h ; четыре пирамиды, составляющие вместе правильную пирамиду со стороной основания $(a-b)$ и высотой h ; а также четыре лежащие на боку прямые призмы с высотой b и катетами оснований h , $(a-b)/2$. Объем усеченной пирамиды тогда будет равен

$$V = b^2 h + (a-b)^2 h / 3 + 4 \times (hb/2)(a-b)/2 = h(a^2 + b^2 + ab)/3.$$



Однако объем усеченной пирамиды можно представить как разность объемов двух неусеченных. Тогда

$$h_1 : (h + h_1) = \sqrt{S_2} : \sqrt{S_1} \Rightarrow$$

$$h_1 = h\sqrt{S_2} / (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}) \Rightarrow$$

$$h + h_1 = h\sqrt{S_1} / (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}) \Rightarrow$$

$$V = (S_1(h + h_1) - S_2 h_1) / 3 = h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) / 3.$$

Каким бы способом египтяне ни нашли правило вычисления объема усеченной пирамиды, само его существование в XIX в. до н.э. говорит о том, что уже в это время они знали достаточно много стереометрических фактов и умели из них выводить с помощью алгебраических преобразований более сложные. Предположение о том, что рассматриваемое правило могло быть найдено эмпирически, неправдоподобно. *Геометрическая алгебра* египтян (т.е. решение алгебраических задач геометрическими методами), возможно, была не только плоской, но и стереометрической, поскольку они умели оперировать с трехмерными величинами, они знали и использовали *подобие плоских и объемных фигур, в том числе треугольников* (как минимум прямоугольных и равнобедренных) и *пирамид*.

Из сказанного выше можно извлечь следующий список математических фактов, предположительно известных древним египтянам до VII в. до н.э., но не изложенных в известных нам математических папирусах:

подобие прямоугольных и равнобедренных треугольников;

равенство прямоугольных треугольников по двум катетам;

равенство углов при основании у равнобедренного треугольника;

свойства вертикальных углов;

числовые характеристики углов;

прямоугольная сетка для масштабного переноса чертежа;

стереометрические построения и подобие объемных фигур.

Возможно, этот список не полон: достоверных сведений о состоянии египетской геометрии в VII в. до н.э. нет. Представленный список основан на косвенных сведениях – на решавшихся в Египте практических задачах и оценке необходимых для этого математических знаний. Однако все эти сведения относятся к гораздо более раннему периоду, чем время знакомства греков с египетской наукой. Можно предположить, что за время, прошедшее с XIX в. до н.э., математика Египта развивалась и ее объем значительно превышал приведенный выше список.

Не следует забывать, что египетская математика не могла застыть на уровне развития XIX или XXV века до н.э., а развивалась вплоть до начала эллинизации Египта; более того, и в эллинистический период она, видимо, не стояла на месте: Герон Александрийский в своих работах ссылается на египетских инженеров (конструкторов).

Арифметика. Кроме целых чисел, об обозначениях которых уже достаточно говорили, египтяне в хозяйственных расчетах использовали и дроби, однако практически только дроби с числителем 1: $1/2$, $1/3$, и т.д., например, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{249}$ и т.п. Исключение делалось для дроби $2/3$: для нее существовал особый знак.

41		
1	59	✓
2	118	
4	236	
8	472	✓
16	944	
32	1888	✓
	2419	

Умножение в Египте сводилось к многократному удваиванию числа и последующему сложению. Например, для умножения 59 на 41 $41=1+2^3+2^5$ выписывался приведенный здесь столбик.

Т.е. фактически множитель представлялся в двоичном виде (как сумма степеней двойки).

При делении чисел египтяне записывали дробные части исключительно аликвотными (с числителем 1) дробями, например, $2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$. При этом разложение неаликвотной дроби на аликвотные было неоднозначно: прийти к такому разложению можно было разными способами.

Прогрессии. Использовали египтяне и арифметическую и геометрическую прогрессию.

Лестница	Дом	7		
	Кошка	49	1	2 801
	Мышь	343	2	5 602
	Ячмень	2 401	4	11 204
	Мера	16 807	Вместе	19 607

Вот, например, задача на арифметическую прогрессию: «Раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет $1/8$

меры».

В таблице выше — задача на геометрическую прогрессию.

Ясно, что речь идет о 7 домах, в каждом по 7 кошек, каждая съела 7 мышей, которые могли съесть по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса могла вырасти 7 мер зерна. Общая сумма находится путем умножения: $2801 \times 7 = 2801 \times (1+2+4)$.

Алгебра. К алгебраическим относятся задачи на «аха» («аха» — куча): $x+ax+bx+\dots+cx=p$. Решение уравнения $x=p/(1+a+b+\dots+c)$. Из-за сложности суммирования и деления дробей, египтяне использовали *правило ложного положения*.

Для решения уравнения $x + x/4 = 15$ брали «с потолка» заведомо неправильное, ложное значение $x = 4$. При подстановке в правой части получается 5, а надо 15. Значит, надо изменить пропорционально x : его надо умножить на $15/5$.

Для обозначения сложения и вычитания египтяне использовали знаки $\text{⋈} = \langle + \rangle$ и $\text{⋋} = \langle - \rangle$, а символ «аха» можно считать первым в истории обозначением неизвестного.

О дедукции в египетской науке. Неизвестно, доказывали ли египетские ученые все использовавшиеся ими факты. Тем не менее, видимо, можно говорить о возникновении неких зачатков дедукции именно в египетской математике. Мы уже видели, что ряд математических фактов в египетской науке мог быть найден дедуктивно, т.е. последовательностью неких рассуждений. Понятно, что это не была дедукция в современном понимании.

Египтология отмечает, что в религиозной философии Египта сердце, «седалище мысли», порождало творческую мысль, а реализовалась она вовне, претворяясь в объективную действительность лишь после того, как божественный замысел был произнесен божественными устами. То есть творческое слово божества — источник бытия, источник всего сущего на земле. Это соображение позволяет прийти к выводу, что уже в глубокой древности египтяне умели размышлять на отвлеченные темы и что понятия, обозначаемые греческими словами $\nu\upsilon\lambda\omicron\varsigma$ и $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, занесенными в Египет в поздние времена, возникли и развились в Египте, а затем уже попали за его пределы. Причем древнеегипетское учение о «логосе» ближе к философским взглядам Филона Александрийского (I в. н.э.), чем к взглядам Платона и Аристотеля. Учение о «логосе» как о творческой силе божества, понимание Филоном «логоса» совпадают с пониманием божественного «слова» в «Пмятнике мемфисской теологии»; они имеют египетские корни.

Часто развитие дедуктивных рассуждений связывают с потребно-

стями юриспруденции. В Египте существовала развитая судебная система; сохранилось много юридических текстов.

Далее, уже во времена Шестой династии (2345–2181 гг. до н.э.) литература древнего Египта стояла на высокой ступени развития: могильные надписи времен первых царей Шестой династии сообщают о «правителях книжного дома», т.е. о чиновниках, заведовавших библиотеками. Широкое распространение литературы в это время в древнем Египте способствовало развитию абстрактного мышления.

Другим подтверждением существования элементов доказательств в египетской науке служат следующие слова Демокрита (ок.460–ок.370 гг. до н.э.): «Из всех моих современников я обошел наибольшую часть земли; я делал исследования более глубокие, чем кто-либо другой, я видел очень много [разнообразных] климатов и стран и слышал весьма многих ученых мужей и никто еще меня не превзошел в сложении линий, сопровождаемом [логическим] доказательством даже так называемые арпедонапты. С ними я пробыл на чужбине 5 лет, посетив их позже всех остальных ученых».

Арпедонапты (натягивающие веревку), применяли свои знания геометрических построений для решения многочисленных задач, возникавших как в землемерии, так и в строительстве. И приведенный здесь фрагмент из Демокрита несомненно связан с геометрико-алгебраическими рассуждениями египтян, это указывает на *наличие в египетской математике элементов дедукции*, в последующем развитой греками.

Видимо, в большинстве своем дедуктивные рассуждения египетских математиков опирались на наглядность и соображения симметрии. Не было в египетской математике и аксиом: многие очевидные факты использовались без доказательства. Тем не менее, египетские ученые могли строить достаточно длинные цепочки логических рассуждений, опирающихся на уже известные (доказанные или очевидные) факты.

Математика древней Греции. Под древней Грецией мы понимаем не только страну, располагавшуюся на Пелопоннесском полуострове, но и многочисленные греческие колонии, располагавшиеся не только на островах Средиземного моря, малоазиатском побережье и в других странах; например, в Италии они получили название «Великой Греции» (об этом напоминает греческое название Неаполь).

В VI в. до н.э. в большинстве греческих государств господства рабовладельческой аристократии сменилась правлением народа — рабовладельческой демократией. Конечно, античная демократия была весьма ограничена, а экономические основы античного общества —

несовершенны. В управлении государством могли принимать участие свободные граждане-мужчины (не женщины, не иноземцы, не рабы).

В конце VI в. до н.э. – начале V в. до н.э. персами было завоевано ионийское побережье; на первое место выдвигается Аттика в материковой Греции и ее столица Афины. Аттика сплачивает вокруг себя греческие государства в борьбе с персами. Объединившись, греки выступили против персов и дважды одержали победы – в 490 г. при Марафоне и десять лет спустя при Саламине. Последняя битва и решила исход войны. В греко-персидских войнах свободные граждане Эллады одержали верх над бесправными рабами персидского царя.

После победы над персами Афины становятся политическим и культурным центром Греции. Происходит реконструкция города, который был почти полностью сожжен, строится Парфенон, все скульптуры которого создаются знаменитым Фидием и его учениками. Афины украшаются многочисленными храмами, заново отстраивается военный и торговый порт Пирей.

Конец V – начало IV в. до н.э. – золотой век Афин. Здесь работают Анаксагор из Клазомен (499–428 гг. до н.э.), Демокрит из Абдер, Гиппий из Элиды (ок.460–ок.400 гг. до н.э.), Феодор из Кирены (ок.465–ок.398 гг. до н.э.), врач Гиппократ из Косса, Аристотель из Стагиры (384–322 гг. до н.э.). Здесь бурлит интеллектуальная жизнь, Сократ будит мысль своих слушателей и помогает ее рождению, здесь была создана знаменитая Академия Платона, а затем и не менее знаменитый Ликей Аристотеля.

В конце V в. разражается затяжная Пелопоннесская война, которая подрывает мощь Афин. В последней трети IV в. на политическую арену древнего мира выступает Македония. В 337 г. Филипп разбил объединенные силы греческих городов, его сын Александр (356–323 гг. до н.э.), закрепив власть Македонии в Греции, начал завоевание Востока.

После походов Александра Македонского во всех покоренных им странах получают широкое распространение греческий язык и греческая культура, которая сплавляется с культурой покоренных народов в так называемую эллинистическую культуру.

Греческая наука интересна в первую очередь тем, что только один раз в истории человечества и только в одном месте – в Греции – возникла та математика, которую принято называть аксиоматико-дедуктивной. И именно этот подход к построению математических теорий используют сейчас во всем мире.

Напомним, что аксиома – основное положение, самоочевидный принцип. В дедуктивных научных теориях аксиомами называются ос-

новные исходные положения той или иной теории, из которых путем дедукции, т.е. чисто логическими средствами извлекается все ее содержание. Аксиомы чаще всего бывают «очевидны»: например, «через две различные точки можно провести только одну прямую» или «часть меньше целого», а бывают и неочевидны, как, например, знаменитый пятый постулат Евклида, который эквивалентен тому, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Способы, с помощью которых из исходных аксиом выводятся новые (не всегда очевидные) утверждения, должны удовлетворять определенным правилам, и именно правила построения логических рассуждений определяют, какая теория получится из аксиом.

Например, если разрешить доказательство существования некоего теоретического объекта только как определение способа его построения, мы получим *конструктивную математику*; в этой математике нельзя доказывать, например, существование решения какого-нибудь уравнения методом «от противного» (т.е. если бы решения не существовало, то в рассуждениях возникло бы противоречие).

Существует и еще один подход к построению математики: математика рассматривается как наука об умственных построениях; основным критерием истинности математического суждения является интуитивная убедительность возможности построения мысленного эксперимента, связанного с этим суждением. Строящаяся таким образом *интуиционистская математика* существенно ограничена в логических рассуждениях и, например, не может оперировать с понятиями, определяемыми при помощи теории множеств.

Исторически в большинстве древних цивилизаций математика возникала именно как конструктивная теория, и лишь только древнегреческая наука дала нам чрезвычайно элегантный и удобный в применении и развитии аксиоматико-дедуктивный подход к построению математической теории; в сочинениях древнегреческих ученых есть и элементы интуиционизма.

Кроме того, Греция – это первая страна, где известны авторы древних научных открытий, изложенных ими в своих сочинениях. Так, в VI в. до н.э. архитектором Метагеном написан трактат о новом методе транспортировки колонн, открытый им и его отцом Херсифоном (это самое раннее из известных авторских сочинений; оно было не единично – уже в V в. до н.э. научные трактаты писались во всех областях Греции). Стремление граждан Греции увековечить свое имя (будь то победа на Олимпийских играх, или создание научного трактата или произведения искусства) – это важная особенность науки Гре-

ции.

Начало греческой математики. Наиболее древние греческие сочинения не сохранили имени автора. Таким является древнейший греческий математический трактат о числе 7: этому числу приписывается огромное количество совершенно замечательных свойств (часто с большой натяжкой). Многие упоминаемые греческими авторами трактаты не сохранились, и об их содержании можно судить только по пересказам более поздних авторов. Так, практически не сохранились математические трактаты ранее IV в. до н.э., и мы судим о них по пересказу греческого историка науки Евдема Родосского (ок.350–ок.290 гг. до н.э.), трактат которого тоже не сохранился, но довольно подробно пересказан Проклом Диадохом (8.2.411–17.4.485).

Ведущая войны с персами, Греция нуждалась в военной технике (осадные и наступательные орудия), а также в развитии методов фортификации. Значительная часть знаний о технической составляющей военного дела поступила в Грецию из Месопотамии и, частично, из Египта и других стран. Однако с V в. до н.э. поток заимствований существенно сократился. Греки должны были сами изобретать и усовершенствовать военную технику, – и тиран Дионисий создал на острове Самос то, что можно назвать первым научно-исследовательским институтом военно-промышленного комплекса: он пригласил со всех концов Греции ученых, которые занимались улучшением и созданием военной техники (не все их изобретения, правда, были реализованы в связи с бедностью Греции природными ресурсами).

Греческие купцы начинают активно торговать на всем побережье Средиземноморья, они учатся у признанных коммерсантов-финикийцев, греческие корабли совершенствуют конструкцию кораблей. Основывая колонии на всех мало-мальски доступных территориях, греки знакомятся с культурой и наукой окружающих их стран.

К этому времени в странах древнего Востока были накоплены математические факты, методы решения задач и приближенных вычислений. Но математики как науки в нашем понимании, т.е. развитой дедуктивной системы предложений, не было. Изложение в сохранившихся сборниках задач было догматическим, без обоснования предлагаемых правил. О том, откуда взялись эти правила и почему они верны, в вавилонских и египетских текстах не говорится; впрочем, и сейчас в справочниках и задачниках также нет выводов правил решения задач. А учебники или научные тексты вавилонян и египтян не сохранились.

Сами греки считали себя учениками египтян в области геометрии. Познакомились они с египетской математикой лишь в конце VII до н.э..

Официальная идеология Египта считала Египет изначально страной-победительницей, а прочие страны – побежденными. Соответственно и отношение к иноземцам было презрительным; их считали людьми низшего класса по сравнению с «чистыми» египтянами. Тем не менее, влияние высокоразвитого Египта на культурную жизнь окружающих стран было значительным: так, у Гомера обнаружено много египетских заимствований; египетская письменность оказала влияние на иероглифическую письменность Крита и хеттов.

Лишь в VII в. до н.э. фараон Псамметих I (664–610 до н.э.) в благодарность эллинам за поддержку в борьбе за власть позволил грекам селиться в Египте; греками была основана колония на территории Египта в Дельте. К этому периоду относится знакомство древних греков с египетской религией, наукой и, в частности, математикой: одной из обязательных частей образования у греческих ученых считалась поездка в Египет. В течение нескольких веков черпали греки знания из сокровищницы египетской науки. Геродот говорит о многих заимствованиях греков из практики египтян – так, по его сообщению, Солон часть своих законов калькировал с египетских. Страбон сообщает об учебе Платона и Евдокса у египетских жрецов.

Многие из полученных от египтян математических знаний для греков не имели того же утилитарного значения, что и для египтян. Так, знание равенства углов при основании равнобедренного треугольника было важно для построения правильных пирамид, но было совершенно не необходимо в землемерной и строительной практике Греции. Естественно, греками такой факт воспринимался как отвлеченный, абстрактный. Стереометрические же познания египтян, такие, как объем усеченной пирамиды, вообще не интересовали греков, поскольку греки не возводили пирамид. Из стереометрии греков интересовали лишь те знания, которые важны на практике: так, оценка объема груды камней требовала знания правила вычисления объема конуса.

Математика древней Греции заимствовала достаточно развитую математику египтян, имевшую уже зачатки логических рассуждений (вспомним Демокрита). Кроме того, влияние на развитие греческой науки оказала и вавилонская: в астрономических знаниях Фалеса, в трудах Герона Александрийского и Диофанта (III в.) можно усмотреть воздействие вавилонской научной традиции.

Фалес. Первым признанным математиком Греции был Фалес Милетский (ок.625–547 до н.э.), родившийся в Милете – богатой и имеющей широкие торговые связи греческой колонии на малоазийском побережье (современная Турция). Фалес Милетский – один из «Семи

мудрецов» древней Греции; он стоял у истоков не только греческой математики, но и всей греческой науки. Традиция признает его первым теоретиком математических исследований. Задачи, Фалесом, часто были прикладными: определение высоты предмета по его тени, расстояния до удаленного предмета (корабля). Его теоретический вклад в математику достаточно скромный, но работа Фалеса дала толчок дальнейшему развитию наук (и не только математики).

Древние источники сообщают, что Фалес был практичным человеком, – как в житейских делах, так и в применении своих математических познаний. Он был не только математиком и философом, но и видным политическим деятелем. Известно, что он был удачливым фабрикантом оливкового масла и ловким дельцом на рынке железа. Известно о применении Фалесом его геодезических познаний при переводе войска Креза через реку (с помощью отводных каналов течение реки было изменено, и войско смогло продолжить путь); известно, что Фалес измерил угловой размер Солнца, предсказывал солнечное затмение (многие известные Фалесу факты имели вавилонское происхождение).

Принято приписывать Фалесу следующие теоретические результаты:

Вертикальные углы равны между собой;

Треугольник (прямоугольный) определяется стороной и прилежащими к ней углами;

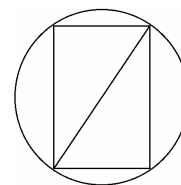
Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой;

Вписанный в полуокружность угол – прямой;

Диаметр делит круг пополам.

Но говорить о том, что Фалес доказывал открытые им факты, можно только с большой осторожностью. Во времена Фалеса еще не были сформулированы правила доказательства тех или иных фактов: видимо, Фалес не доказывал, а объяснял правильность высказываемого им утверждения. Последнее же приписываемое Фалесу открытие (диаметр делит круг пополам), вероятно, приписано Фалесу его позднейшими последователями: соглашаясь с тем, что Фалес умел вписывать в окружность прямой угол, позднее греческие математики, воспитанные на дедуктивных рассуждениях, полагали, что он доказывал равенство прямому вписанного в окружность угла, опирающегося на диаметр. Известно, что этот факт доказывали исходя из того, что круг делится диаметром пополам. Поэтому Евдему, писавшему свою историю геометрии через 200 лет, естественно было предположить у Фалеса тот же ход мысли, что и у современников Евдема.

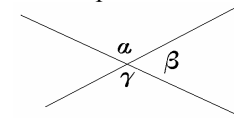
В действительности то, что вписанный в полуокружность угол – прямой, легко усмотреть из рисунка: очевидно, в окружность можно



вписать прямоугольник, диагональю которого как раз и является диаметр окружности. Вообще о строгом доказательстве того или иного факта Фалесом говорить сложно, поскольку, повторяюсь, уровень развития логических рассуждений в его время был еще весьма низок, хотя, как мы видели, элементы дедукции Фалес мог почерпнуть у египтян.

Вообще на первоначальном этапе развития греческой математики, видимо, большее внимание уделялось обнаружению тех или иных фактов, а не их доказательству. Такое отношение к математике, видимо, в среде нематематиков сохранялось довольно долго: Прокл, разбирая теорему о том, что сумма двух сторон треугольника больше третьей, сообщает: «Эпикурейцы высмеивали эту теорему, говоря, что она очевидна даже ослу и не нуждается в доказательстве...»

То есть те факты, которые можно было уяснить из соображений симметрии или по виду чертежа, в ранней греческой математике вряд



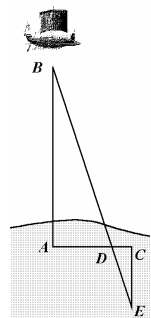
ли требовали доказательств. Скорее всего, в рассмотрении чертежей присутствовали некие рассуждения, которые, однако, в строгом смысле доказательства назвать нельзя.

Так, равенство вертикальных углов сразу видно из того, что $\alpha = 180^\circ - \beta = \gamma$. Однако у Фалеса это не являлось строгим доказательством, поскольку еще не была введена аксиома «если от равного отнять равное, то получится равное».

Точно также не является строгим доказательством такое объяснение равенства углов при основании равнобедренного треугольника. A – центр окружности, $\triangle ABC$ – равнобедренный. Смешанные (т.е. составленные из отрезка прямой и дуги окружности) углы ACD и ABD равны, поскольку опираются на диаметр. А смешанные углы BCD и CBD равны как опирающиеся на одну хорду. Поэтому $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC$ (это, возможно, восходящее к Фалесу, рассуждение Аристотель критикует как образец несовершенного доказательства: оно опирается на недоказанные и не постулированные факты).

Равенство вертикальных углов Фалес использовал для измерения расстояния до удаленного предмета (корабля в море). Для этого он, по

словам Евдема, использовал другое свое открытие – равенство треугольника по стороне и двум прилежащим углам. Подобные геодезические приемы, использовавшиеся задолго до Фалеса египтянами и представителями других средиземноморских культур, использовались и в эллинистическую эпоху (естественно, претерпев ряд изменений).



Видимо, Фалес предложил измерять расстояние до удаленного предмета, используя подобные треугольники, и именно для этого ему было необходимо знать о равенстве вертикальных углов BDA и EDC , и равенства по построению прямых углов BAC и ECD следует подобие треугольников ABD и CED , откуда $BA : CE = AD : CD$ и $BA = CE \cdot AD / CD$.

Кроме того, Плиний и Плутарх сообщают об использовании им подобных треугольников в решении другой практической задачи: измерение высоты пирамиды по величине ее тени.

Из этих сообщений можно предположить, что либо Фалес использовал равенство сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, либо, что более вероятно, исходя из подобия двух произвольных прямоугольных треугольников, определял стороны одного треугольника, зная одну его сторону и две стороны другого. Вряд ли первый способ вызвал бы восхищение окружающих, – гномоника (искусство определения различных величин по длине тени шеста) в Египте имела достаточно глубокую историю.

Т.е. *Фалес умел пользоваться свойствами подобных прямоугольных треугольников, зная о пропорциональности их сторон.*

Несомненную важность не только для теории, но и для практики несет другой (уже упоминавшийся) факт, несомненно, открытый Фалесом (видимо, египтяне его не знали или им не пользовались): вписанный в полукруг треугольник, одна сторона которого есть диаметр, прямоуголен. Не зря, согласно легенде, Фалес за это принес в жертву богам быка. Сколь же значимо и ново должно было быть открытие Фалеса, чтобы он в благодарность богам принес богатую жертву?

Учитывая достаточно высокий уровень развития египетской математики по сравнению с греческой того периода, задумаемся, какой факт из приписываемых Фалесу мог действительно существенно обогатить уже частично известную грекам египетскую науку? Как мы видели выше, три из них уже были известны египтянам, а один – крайне сомнителен. Последний же имел не только теоретическое значение, но

и большую практическую значимость. Важность этого открытия Фалеса была в том, что *обнаружился новый способ построения прямых углов без использования так называемых «египетских треугольников»*, т.е. прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами. Самым известным из них является треугольник со сторонами 3, 4, 5. Необходимость постоянно иметь при себе шнур с отмеренными на нем отрезками, необходимыми для построения прямого угла на чертеже, благодаря открытию Фалеса отпадала. Более того, стало возможно легко строить прямые углы на любой, сколь угодно затейливой конфигурации и сколь угодно малых размеров площадке. Такой возможности раз и навсегда отмеренные отрезки измерительного шнура не давали.

То есть это открытие Фалеса совершило революцию в технике геометрических построений, упростив метод построения прямого угла, – для этого необходим был лишь шнур любой длины. И за такое открытие, не только важное на практике, но и превзошедшее знания считавших себя «высшей нацией» египтян, действительно, стоило поблагодарить богов.

Еще раз повторюсь, что неизвестно, доказывал ли Фалес известные ему факты или нет. Более правдоподобно то, что Фалес лишь знал эти факты (и, возможно, умел их объяснять), а о доказательстве в греческой науке стали задумываться много позднее.

Что же касается вклада Фалеса в арифметику, то Ямвлих Халкидский (ок.250–ок.330) во «Введении в «Арифметику» Никомаха» сообщает: «Фалес определил [число] как «совокупность единиц», следуя египетскому воззрению, а именно в Египте он и занимался науками».

Видимо, именно эту идею следует считать наиболее важным вкладом Фалеса в греческую арифметику. Именно она стала затем основой пифагорейского учения о числе. Геометрические же знания Фалеса на начальное развитие математики, видимо, большого влияния не оказали, поскольку геометрия вошла в состав математики много позднее арифметики (теории чисел).

Итак, вклад Фалеса в развитие математики:

Определив число как совокупность единиц, он заложил основу учения, развитого позднее пифагорейцами. Именно от пифагореизма начинается собственно развитие математики.

Фалес предложил новый чрезвычайно удобный способ построения прямого угла вписыванием в полукруг треугольника. Введение этого приема стало поворотным моментом в развитии техники геометрических построений и, как следствие, геометрической алгебры и геометрии вообще.

Фалес познакомил греков с практическими приемами использования геометрии, которые он позаимствовал у египтян и объяснил (не доказал!!!) используемые геометрические факты. Ранее египетская наука была недоступна «нечистым» грекам и практически им неизвестна.

Пифагор. Следующим важным этапом в развитии математики стала деятельность пифагорейской школы.

Пифагор (VI в до н.э.) родился на острове Самос. Его имя значит «предсказанный пифией»: его отцу было предсказано великое будущее сына. Пифагор много путешествовал: есть сообщения о его длительном обучении в Вавилоне (и, возможно, Индии), а также в Египте. Из-за разногласий с властями Пифагор около 530 г. до н.э. переехал в Кротон, где организовал свой знаменитый пифагорейский союз. Деятельность союза была направлена не столько на постижение научных истин, сколько на попытки переустройства общества в соответствии с философскими и религиозными взглядами Пифагора. Союз своей закрытостью скорее напоминал религиозную секту, а Пифагор, стремившийся к популярности, умело создавал о себе легенды. Попытки Пифагора влиять на политическую жизнь Южной Италии привели к разгрому пифагорейского союза и гибели Пифагора. Но ученики Пифагора и ученики учеников продолжали называть себя пифагорейцами; многие из них внесли существенный вклад в развитие математики.

Члены «пифагорейского союза», кроме прочего, занимались и исследованиями в области математики. Конечно, в промежуток времени между Фалесом и пифагорейской школой математические исследования проводились и другими греческими учеными, однако никакими достоверными сведениями о результатах их исследований мы не располагаем. Поэтому с более или менее высокой степенью уверенности мы можем обсуждать лишь те математические результаты, которые приписываются античными источниками пифагорейской школе.

Значительную часть их исследований занимали теоретико-числовые задачи, казалось бы, совершенно оторванные от действительности. Изучение этих задач было стимулировано идеей Фалеса о том, что число есть совокупность единиц. Практически все сведения о пифагорейской арифметике имеют своим источником сочинение Никомаха из Геразы (I в.) «Введение в арифметику», и сказать точно, какие из них принадлежат пифагорейцам-современникам Пифагора, а какие позднейшим исследователям, невозможно. Однако, несомненно, пифагорейцы исследовали свойства натуральных чисел в основном с точки зрения их «магических» качеств. Приписывая числам некие ма-

гические свойства, пифагорейцы пытались познать окружающий мир через числовые соотношения («Все есть число»). Это привело, с одной стороны, к развитию логических построений в математических рассуждениях, и, с другой стороны, к обожествлению чисел и приписыванию им различных магических свойств.

Выше уже говорилось о трактате о числе 7, которому приписывались самые замечательные свойства. Пифагорейцы же обожествляли десятку, и не потому, что она имеет какое-либо влияние на жизнь человека, а потому, что обладает теоретико-числовыми свойствами, правда, как и в случае семерки, ряд свойств выполнялся с «натяжкой». Так, утверждая, что среди чисел от 1 до 10 равное число простых и составных, они включали в число простых чисел единицу, которую сами же полагали не числом, а «первоосновой чисел», монадой: любое число (натуральное) – это множество монад. Интерес к десятке и приписывание ей неких магических свойств в первую очередь оправдывался тем, что она являлась основой систем счисления известных пифагорейцам народов, но они этот факт связывали не с наличием у человека десяти пальцев, а с неким божественным провидением.

Теоретико-числовые исследования в значительной степени обслуживали и магические потребности пифагорейцев. Теоретико-числовые свойства пифагорейцы интерпретировали как некие сущности (равноправное – неравноправное, мужское – женское и т.п.), и пытались с помощью чисел выразить все сложные закономерности окружающей их жизни – как физической, так и духовной. Современная нумерология ведет свое начало от пифагорейцев. Но дальнейшее развитие теории чисел пифагорейцами дало ряд важных для математики и ее приложений фактов. Такими были исследования составных чисел и, в частности, четности и нечетности чисел (несомненно, известной и египтянам, и вавилонянам). Большой интерес для пифагорейцев представляли степени двойки. (Здесь я замечу, что математика самых различных цивилизаций выделяла свойства четных и нечетных чисел, – так было, например, и в древнем Китае.) Пифагорейцы обнаружили простые числа, исследовали свойства составных чисел, что привело к открытию *совершенных* и *дружественных* чисел.

Совершенное число – число, равное сумме всех своих делителей (например, $6=1+2+3$ или $28=1+2+4+7+14$). Позднее греческими математиками было выяснено, что совершенные числа можно искать в виде $2^n(2^{n+1}-1)$: если $(2^{n+1}-1)$ – простое число, то $2^n(2^{n+1}-1)$ – совершенное (теорема Евклида).

Дружественные числа – числа, равные сумме делителей другого

числа, например, 220 и 284: $284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$ и $220=1+2+4+71+142$.

Сейчас в теории чисел исследуются и числа-близнецы, т.е. простые числа с разностью 2, например, 17 и 19 или 71 и 73.

Возможно, именно пифагорейцам принадлежит первенство в применении *алгоритма Евклида* для определения наибольшего общего делителя двух целых чисел. *Алгоритм Евклида* состоит в следующем. Пусть требуется найти общую меру двух величин A и B , $A \geq B$. Положим $A - k_0 B = C_1$, $C_1 < B$; $B - k_1 C_1 = C_2$, $C_2 < C_1$; $C_1 - k_2 C_2 = C_3$, $C_3 < C_2$; ... $C_n - k_{n+1} C_{n+1} = C_{n+2}$, $C_{n+1} < C_{n+2}$; ... (k_i – неполные частные – натуральные числа.)

Если на некотором шаге C_m обратится в нуль, то величины A и B соизмеримы и их общая мера – C_{m-1} , которая укладывается в A и B целое число раз, например, $A = \lambda C_{m-1}$, $B = \mu C_{m-1}$, и, очевидно, $A:B = \lambda:\mu$ (для натуральных чисел это – наибольший общий делитель). Если же A и B несоизмеримы, то эта процедура оказывается бесконечной.

С точки зрения современной математики, алгоритм Евклида совпадает с разложением числа $\alpha = A:B > 1$ в цепную дробь, поскольку неполные частные – это коэффициенты цепной дроби.

Цепной (простейшей) дробью называется выражение вида

$$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}, \quad k_i > 0 \text{ для } i > 0. \text{ Число элементов цепной дроби может}$$

быть как конечным, так и бесконечным. В первом случае получаем конечную n -членную цепную дробь (с $(n+1)$ элементами), которую мы обозначаем $[k_0; k_1, k_2, \dots, k_n]$ а в другом случае – бесконечную цепную дробь, которую будем обозначать $[k_0; k_1, k_2, \dots]$.

Значением бесконечной цепной дроби $\alpha = [k_0; k_1, k_2, \dots]$ называется предел ее подходящих дробей: $\alpha = \lim \alpha_n$, а $\alpha_n = [k_0; k_1, k_2, \dots, k_n]$ – n -й подходящей дробью. При этом $\{\alpha_n\}$ – возрастающая последовательность, а $\{\alpha_{2n-1}\}$ – убывающая.

Последовательность действий $\alpha = k_0 + 1/r_1$, $k_0 = [\alpha]$ – целая часть α ; $r_1 = k_1 + 1/r_2$, $k_1 = [r_1]$, ..., $r_m = k_m + 1/r_{m+1}$, $k_m = [r_m]$, ... позволяет разложить $\alpha = [k_0; k_1, k_2, \dots]$ в цепную дробь. Если α – рациональное, то полученная цепная дробь конечна, если же α – иррациональное, то получится бесконечная цепная дробь; квадратичные иррациональности (вида $a \pm \sqrt{b}$) представляются периодическими цепными дробями: $\sqrt{A} = [k_0; k_1, k_2, \dots]$

$k_s, k_1, k_2, \dots, k_s, \dots] = [k_0; \overline{k_1, k_2, \dots, k_s}]$. Известно, что подходящие дроби полученной цепной дроби – в некотором смысле ее наилучшие рациональные приближения для α . Цепные дроби обладают еще одним важным теоретико-числовым свойством. Пусть s – период цепной дроби, представляющей $\sqrt{A}$, и $n = s+1$, если s четно, и $n = 2s+1$, если s нечетно. Тогда числитель и знаменатель подходящей дроби $Q_n = a_n/b_n$ удовлетворяет уравнению Пелля-Ферма $a_n^2 - Ab_n^2 = 1$. Впервые решение этого уравнения связал с цепными дробями Джон Валлис (23.11.1616–28.10.1703), но Эйлер по ошибке связал это с именем Джона Пелля (1.3.1611–12.12.1685). А цепные дроби явно выписывал впервые Рафаэль Бобелли (1526–1572).

Пифагорейцы исследовали и *многоугольные числа*. На рисунке представлены числа: треугольные (1, 3, 6, 10, ...), квадратные (1, 4, 9, 16, ...), пятиугольные (1, 5, 12, ...) и прямоугольное 4×7. Многоугольные числа фактически представляют собой суммы арифметических прогрессий $a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $a_0 = 1$, $a_k = a_{k-1} + d$; для треугольных чисел $d=1$, для квадратных – $d=2$, для пятиугольных – $d=3$

и т.д. Исследования многоугольных чисел дали методы суммирования арифметических (целочисленных) прогрессий. Кроме того, представление чисел геометрически, в виде точек, позволяло легко находить свойства, например, произведений: если один из сомножителей делится, например, на 2, то и строка изображающих его точек делится пополам, а, следовательно, все произведение, представленное прямоугольником точек, можно разделить прямой пополам. Следовательно, если один из сомножителей четный, то и произведение – четное.

Пифагорейцы исследовали плоские (вида $m \times n$) и объемные числа – кубические (вида n^3), а также пирамидальные (суммы многоугольных). Значительная часть теоретико-числовых исследований пифагорейцев имела свое продолжение в дальнейшем, как в древнегреческой науке, так и в современных математических исследованиях.

Важным вкладом в математику стало правило нахождения «пифагорейских троек» – сторон целочисленного прямоугольного треугольника. Это был первый опыт получения общего решения *диофантова уравнения* $x^2 + y^2 = z^2$.

Диофантовы уравнения – алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, решения которых отыскиваются в целых или рациональных числах. Обычно

предполагается, что число уравнений меньше числа неизвестных, т.е. количество рациональных или целых решений бесконечно; по этой причине диофантовы уравнения называются также *неопределенными*. К диофантовым уравнениям относится и уравнение Пелля-Ферма.

Пифагорейцы предложили по любому нечетному числу a , строить тройку чисел a , $(a^2-1)/2$, $(a^2+1)/2$, удовлетворяющую уравнению $a^2 + ((a^2-1)/2)^2 = ((a^2+1)/2)^2$.

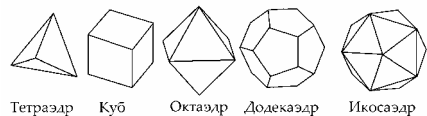
Позднее Платон предложил брать тройки $2a$, a^2-1 , a^2+1 , также удовлетворяющие уравнению $(2a)^2 + (a^2-1)^2 = (a^2+1)^2$.

Позднее эти правила были обобщены древнегреческими математиками и у Диофанта уже дается общее правило нахождения всех пифагорейских троек: $x=a^2-\beta^2$, $y=2a\beta$, $z=a^2+\beta^2$, $x^2+y^2=z^2$.

К теоретико-числовым исследованиям пифагорейцы присоединили и геометрические. Видимо, именно они были первыми, кто начал систематически использовать элементы дедукции в математических рассуждениях. Однако можно считать, что большая часть геометрических фактов доказывалась не так, как принято в современной математике, а исходя из соображений симметрии и наглядности чертежа.

Пифагорейцам приписывается, например, доказательство того, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Это доказательство использует равенство накрест лежащих углов ($\angle DAC = \angle ABC$ и $\angle EAC = \angle ACB$), которое неявно опирается на пятый постулат Евклида о параллельных, во времена пифагорейцев еще не сформулированный. Т.е. опять мы видим не доказательство, а объяснение, опирающееся на наглядность чертежа.

Кроме плоских фигур, пифагорейцев интересовали и объемные тела – многогранники. Ими были связаны с четырьмя мировыми стихиями (огнем, землей, воздухом и водой) четыре правильных многогранника:



тетраэдр, куб, октаэдр и додекаэдр. Тетраэдр и куб были известны во всех древних культурах; форму октаэдра имеют кристаллы меди. Додекаэдры также встречались в некоторых древних культурах (например, у этрусков). Умение построить грань додекаэдра – правильный пятиугольник – было показателем высокого знания человека (недаром большинство магических сеансов начинается с построения пентаграммы). Хотя правильный пятиугольник умели строить и в древнем Египте, и в Вавилоне, пифагорейцы относили умение производить сложные

геометрические построения к одному из тайных искусств. Позднее к четырем пифагорейским многогранникам добавился икосаэдр; его исследовал современник Платона Теэтет Афинский (ок.417–ок.369 до н.э.) и он, видимо, доказал, что других правильных многогранников не существует. Сейчас они часто называются «Платоновы тела».

Несоизмеримость. Попытка решения известной еще египтянам и вавилонянам важной практической задачи – определения отношения диагонали квадрата к его стороне – поставило в тупик пифагорейцев, полагавших, что «все есть число». Число они полагали совокупностью единиц, и пытались измерить все в мире с помощью если не самих чисел, то с помощью их отношений. Как известно, ни египтяне, ни вавилоняне не задумывались о «точном» значении той или иной величины: им было достаточно уметь ее вычислить с достаточной для данного случая точностью (при этом и те и другие отлично понимали, что число вычислено более или менее точно). Попытка решить практическую задачу – «точно измерить» отношение диагонали квадрата к его стороне привела к открытию несоизмеримости, что стало поворотным моментом в истории развития математики. Это привело к открытию первого в истории математики доказательства «от противного» – доказательства иррациональности $\sqrt{2}$.

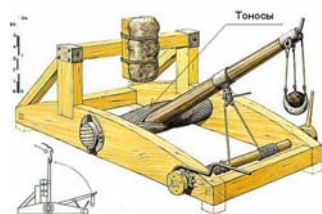
Если предположить, что $\sqrt{2}$ – рациональное число, т.е. $\sqrt{2} = m/n$ и m/n – несократимая дробь, то $m^2 : n^2 = 2$, и, значит, m делится на 2: $m=2p$. Тогда $4p^2 : n^2 = 2$, и $n^2 : p^2 = 2$, т.е. и n должно делиться на 2. Противоречие, т.к. m и n не имеют общих делителей.

В дальнейшем результаты пифагорейцев были использованы Теэтетом Афинским для определения и классификации иррациональностей. Исследование $\sqrt{2}$ привело к созданию теории «боковых» и «диагональных» чисел, позволявшей находить все возможные решения диофантова уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, т.е. сколь угодно близкие рациональные приближения $\sqrt{2}$.

Особняком стоят исследования Пифагора по гармонии (теории музыки). Известно описание Ямвлиха Халкидского экспериментов Пифагора по изучению свойств колеблющейся струны. Он исследовал сначала тон звучания молотков в зависимости от их веса, а затем – струн в зависимости от веса подвешиваемого к ним груза. Кроме того, Пифагор изготовил первый известный в истории физический прибор для проведения экспериментов – хордотон, представлявший собой одну натянутую струну, на которой можно было изучать колебания и тон

звучания струны в зависимости от способов звукоизвлечения.

В описании экспериментов Пифагора со струнами Ямвлих допускает ряд ошибок, однако общий вывод экспериментов Пифагора о том, что частоты благозвучных сочетаний звуков соотносятся как 2:1 (октава), 3:2 (квинта) и 4:3 (кварта) верны. Пифагор, кроме определения основных ступеней музыкальной шкалы (октавы, квинты, кварты), стремился определить и промежуточные ступени, разбивая гамму на 7 основных ступеней и варьирующееся число промежуточных (полутонов и даже четверть-тонов). Эти шкалы отличались для различных музыкальных стилей (фригийского, лидийского, ионийского и др.), подобно тому, как в современной музыкальной шкале отличаются мажор, минор и их разновидности. Составлением музыкальной шкалы занимались позднее многие математики – Евклид, Эратосфен, Птолемей и др. Только после введения в обиход современной «темперированной» музыкальной шкалы споры о том, как должна быть устроена гамма, затихли. Хотя для того, чтобы новую музыкальную систему признали, И.С.Баху пришлось сочинить знаменитый «Хорошо темперированный клавир». До введения темперации для игры в разных тональностях музыкальные инструменты приходилось каждый раз перенастраивать.



Торсионное орудие (онагр)

Но для чего же Пифагор исследовал зависимость высоты звука от силы натяжения струны? С трудом можно представить себе древнегреческого музыканта, проверяющего натяжение струн на инструменте не на слух, а с помощью динамометра.

Сведения о том, что не позднее 400 года до н.э. были изобретены так называемые торсионные (от французского *torsion* – кручение, скручивание) метательные осадные орудия, проливают свет на цель экспериментов Пифагора. Источником энергии торсионных орудий служили канаты, так называемые тоносы, закручиваемые при помощи деревянных рычагов. Для достижения высокой точности после каждых 3–4 выстрелов натяжение тоносов проверялось с помощью камертонов.

Учитывая, что использование торсионных орудий приписывается сиракузскому тирану Дионисию (в 398 году до н.э. против карфагенских кораблей), можно предположить, что известны они были еще до него, а целью собранных Дионисием при своем дворе ученых было усовершенствование известной военной техники. (Археологические

находки на Кипре позволяют предположить существование военных катапульт в V в. до н.э.) Использование для накопления упругой энергии скрученных связок сухожилий, вероятно, ведет свое происхождение от «испанского ворота», использовавшегося на древних кораблях.

Итак, Пифагор исследовал возможность с помощью извлечения звуков из струн (тоносов) одинаковой длины и структуры определять соотношение силы их натяжения.

Работой пифагорейского союза завершился первоначальный этап становления математических наук в древней Греции.

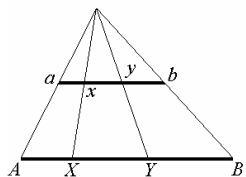
Усилиями пифагорейцев – учеников Пифагора и их последователей математические знания распространились по всей Греции. Интерес к занятиям математикой и другими науками проявлялся гражданами всех греческих городов. При этом в отличие от ученых других стран греческие ученые не только накапливали научные факты, но и пытались их объяснить и систематизировать (это касалось и математики, и механики, и биологии...). В различных регионах Греции формируются научно-философские школы.

Бесконечность и атомизм. Одно из видных мест среди них занимает Элейская школа во главе с Парменидом (род. ок. 540 или ок. 515 г. до н.э.). Один из учеников Парменида – Зенон (ок. 490–430 гг. до н.э.) первым начал строить философскую теорию на основе логических рассуждений; также он интересовался вопросами бесконечности. С проблемой бесконечных процедур или величин греческие ученые столкнулись при попытках квадрирования и спрямления линий (т.е. вычисления ограниченной линией площади и длины линии). При этом широко была популярна атомистическая теория Демокрита, который утверждал, что все в мире состоит из мельчайших неделимых атомов. Противоречивость атомизма Демокрита и понятия бесконечности вдохновила Зенона на создание «апорий», или «трудностей», – парадоксов, связанных с понятием бесконечности, например, таких.

«Дихотомия» («деление пополам»). Движущееся тело никогда не пройдет свой путь, поскольку оно должно сначала пройти половину пути, затем половину оставшегося пути, затем половину оставшегося пути, затем половину оставшегося пути, и т.д..

«Ахиллес и черепаха». Быстроногий Ахиллес никогда не догонит ползущую впереди него черепаху, поскольку сначала он должен достигнуть точки, где черепаха была в первоначальный промежуток времени, но черепаха за это время отползет вперед, в новую точку. Затем Ахиллес должен будет добежать до этой новой точки, но черепаха вновь отползет вперед, и т.д..

«Стрела». Если верно, что пространство и время состоят из мельчайших неделимых частиц, то движение невозможно. Летящая стрела в каждый неделимый момент времени находится в неделимом положении пространства, а, следовательно, она не движется.



Позднее греческие ученые отказывались рассматривать бесконечность в своих рассуждениях. Так, Аристотель высмеивал тех, кто считал, что прямая состоит из точек. Действительно, такое предположение вынуждало отказаться от одной из важнейших аксиом греческой математики: целое больше части. Половина отрезка имеет столько же точек, что и весь отрезок, поскольку все точки отрезка и его половины можно поставить во взаимно-однозначное соответствие. Каждой точке отрезка AB можно поставить в соответствие ровно одну точку отрезка ab и наоборот ($X \leftrightarrow x, Y \leftrightarrow y$).

Демокрит из Абдеры (ок. 470/460– ок. 400 гг. до н.э.), греческий философ. Согласно легенде, будучи воспитанником персидских магов, он был приверженцем восточной мудрости, совершил путешествия в Египет, Эфиопию, Персию, Халдею (Вавилон) и Индию. Он усовершенствовал и дополнил атомистическую теорию своего учителя Левкиппа. Демокрит впервые сформулировал *принцип Кавальери*: если два тела при пересечении параллельными плоскостями всегда имеют сечения одинаковой площади, то их объемы равны (с этим принципом, по-видимому, были знакомы и египтяне). Вот объяснение этого факта атомистом-Демокритом. Поскольку все тела состоят из одинаковых мельчайших частиц – атомов, то из того, что все сечения имеют одинаковую площадь, следует, что соответствующие слои атомов равночисленны, а, значит, и общее число атомов в телах одинаково. Следовательно, объемы равны.

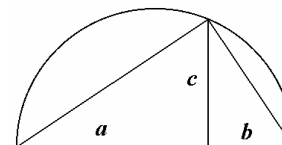
Три знаменитые задачи древности и геометрическая алгебра.

Однако наибольший вклад в развитие греческой математики дало не обсуждение ее философских проблем, а решение *трех знаменитых задач древности*. Это задачи об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга. При этом решаться эти задачи должны были с помощью циркуля и линейки, т.е. методами *геометрической алгебры*. Геометрическая алгебра возникла, видимо, еще в Египте и Вавилоне, где геометрические построения применялись также и в вычислительных задачах. Циркуль и линейка были первыми и основными инструментами инженеров, землемеров и архитекторов глубокой древности (и позднее – в Средние века). С их помощью производилось построение и

измерение отрезков, длины которых сейчас удобнее вычислять арифметически. Однако как инструмент теоретической математики они, видимо, впервые стали рассматриваться пифагорейцами. Попытка объяснить все природные явления отношениями целых чисел («Всё есть число») привела пифагорейцев к открытию несоизмеримых величин, следствием невозможности определения точного числового значения той или иной величины стало введение в математику методов построения этих величин на чертежах с помощью давно использовавшихся на практике инструментов: линейки (натянутой бечевы) и циркуля (бечевы с двумя кольшками на концах).

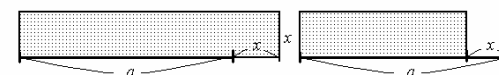
Известно, что во всех древних цивилизациях в конструкторской практике в геометрических построениях эти примитивные инструменты использовались очень активно. Так, в составленном около V в. до н.э. древнеиндийском трактате «Шульба-сутра» («Правила веревки») дается свод правил геометрических построений с их помощью.

Т.е. древнегреческие математики стали применять в своих теоретических исследованиях практические инструменты архитекторов и ремесленников, и сделано это было для того, чтобы, научившись строить на чертежах величины, которые нельзя (или сложно) выразить отношением целых чисел, иметь возможность исследовать их свойства, при этом геометрические построения с помощью циркуля и линейки



несли на себе вычислительную функцию: алгоритм геометрического решения задачи играл такую же роль в древнегреческой математике, как и формула для решения уравнения в современной. Действительно, формула $y=f(x)$ указывает, как по значению переменной x определить значение величины y . Точно так же чертеж показывает, как по двум величинам a и b построить их среднее геометрическое $c = \sqrt{ab}$.

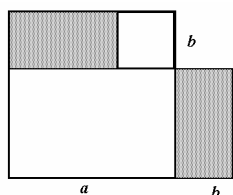
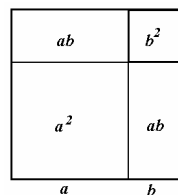
При этом по формуле $y=f(x)$ значение величины y можно определить со сколь угодно высокой точностью. Точно также и при использовании геометрического построения решения можно повышать точность



результата, увеличивая точность и аккуратность манипуляций с циркулем и линейкой.

Чертеж в геометрической алгебре древних играл такую же роль, что и формула в современной. Например, задача о решении квадратного уравнения формулировалась так: приложить к данному отрезку (от-

нять от данного отрезка) длины a отрезок так, чтобы прямоугольник, построенный на полученном отрезке и на прилагаемом (отнимаемом) отрезке имел данную площадь S (был равновелик данной фигуре). Это



эквивалентно записи квадратного уравнения $x(a \pm x) = S$. Процедура геометрического решения такого уравнения полностью совпадала с современным решением с дискриминантом (правда, греки

искали только положительные корни).

С помощью геометрических понятий греки умели производить достаточно сложные алгебраические преобразования; правда, методами геометрической алгебры можно было решать уравнения не выше 2-й степени или сводящиеся к ним.

Все использовавшиеся ими формулы были выведены методами геометрической алгебры. Вот как выглядели, например, доказательства равенств $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Для повышения точности геометрического решения алгебраической задачи нужно было строить как можно более тонкие линии, и это привело к возникновению в греческой математике понятия идеальных кривых – т.е. кривых, не имеющих толщины.

То есть в теоретической математике использовались объекты, которые реально невозможны на практике, но являлись идеализацией реальных. При этом в геометрических рассуждениях греки использовали реальные чертежи, отлично сознавая, что «идеальными» те не являются. Тем не менее, чем точнее чертежные инструменты, тем ближе к «идеальному» получается чертеж и тем с большей точностью строится на нем искомая величина (т.е. тем лучше работает «геометрический калькулятор»).

Итак, «идеальные» прямые и окружности выполняли двойную функцию: с одной стороны, они были инструментами научного исследования, а с другой – средством решения практических задач, причем, с чем большей тщательностью был выполнен соответствующий чертеж, тем более точное решение задачи можно было получить.

Вернемся к приведенной выше задаче о построении среднего геометрического двух величин a и b – $c = \sqrt{ab}$. Казалось бы, имея в своем арсенале такое мощное средство, как метод Герона для вычисления приближений квадратных корней, древнегреческие практики не нуждались в геометрических построениях для решения конкретных задач.

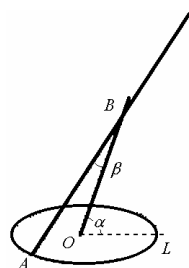
Однако применение этих вычислительных методов с использованием алфавитной нумерации и представления дробей в виде суммы аликвотных требовало от них достаточно высокой арифметической подготовки и не было быстрым. А геометрическое решение тех же задач производилось много быстрее, не требовало длительных вычислений и его результат мог быть сразу измерен или отмечен на конструируемом объекте. Такой подход к разметке возводимых сооружений был широко распространен в Древнем Египте; естественно, что его восприняли и древнегреческие практики.

О необходимости частого проведения такого сорта вычислений в походных условиях сообщают различные античные сочинения по *полиоркетике* – науке об осадных орудиях.

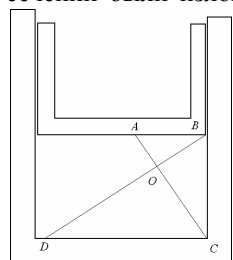
Задача об удвоении куба. Полиоркетика же и потребовала от греческих конструкторов умения быстро вычислять приближенные значения кубических корней: если в одной модели осадного орудия, рассчитанного на ядра весом в a единиц требовался направляющий желоб диаметра d , то для ядра весом Na единиц был нужен желоб диаметра $\approx d\sqrt[3]{N}$. Вычисление кубических корней требовалось и для других задач практики. Поскольку методами геометрической алгебры можно решить только те задачи, которые сводятся к решению квадратных уравнений, а вычисление $\sqrt[3]{N}$ эквивалентно решению кубического уравнения $x^3 = N$, то эта задача циркулем и линейкой не решается. Многочисленные неудачные попытки решить такую задачу и постоянная необходимость вычисления достаточно точных значений кубических корней привела к тому, что эта задача обросла многочисленными легендами. В этих легендах требовалось по той или иной причине (чума в Афинах, смерть ребенка и т.д.) удвоить кубический алтарь (вычисление $\sqrt[3]{2}$ – простейший случай решения задачи о вычислении $\sqrt[3]{N}$). Такие легенды бытовали и в средневековье, однако самая распространенная из них – об алтаре на острове Делос, поэтому задача об удвоении куба часто называется «Делосской».

Гиппократ Хиосский (2-я пол. V в. до н.э. – не путать с врачом Гиппократом из Косса!) обнаружил, что для решения Делосской задачи достаточно уметь находить два средних пропорциональных произвольных чисел a и b , т.е. таких чисел x , y , что $a:x=x:y=y:b$; тогда $x = \sqrt[3]{a^2b}$ и $y = \sqrt[3]{b^2a}$; если $a=1$, а $b=N$, то $x = \sqrt[3]{N}$. Позднее стало ясно, что решение Делосской задачи можно свести к определению точки пересечения геометрических мест $x^2 = ay$ и $y^2 = bx$ или $x^2 = ay$ и $ab = xy$, т.е.

двух парабол или параболы и гиперболы. Конечно, написанные выше уравнения этих кривых греками не использовались: кривые описывались «симптомами» примерно таким образом: прямоугольник, построенный в данном прямом углу, равновелик прямоугольнику со сторонами a , b (гипербола) или: квадрат равновелик прямоугольнику, построенному на отрезке a и продолжении одной из сторон квадрата.



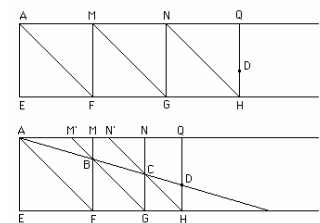
Позднее было обнаружено, что описанные таким образом геометрические места – кривые, которые можно получить, пересекая конус плоскостью; парабола и гипербола стали называться коническими сечениями, и к ним добавился эллипс (такие названия новым кривым позднее дал Аполлоний Пергский). Описанием конических сечений занимался ученик Платона Менихм (ок.380–ок.320 гг. до н.э.), который, по видимому, вычерчивал эти кривые с помощью специальных приспособлений. Одним из таких приспособлений был описанный позднее в арабской математике «совершенный циркуль». Ножка BA составляет постоянный угол с осью вращения BO и может менять свою длину, а ось вращения (ножка) OA закреплена под постоянным углом к плоскости L . В зависимости от соотношения углов α и β можно получить эллипс, параболу или гиперболу. Досконально исследованные в античности свойства конических сечений позволяют использовать для их вычерчивания и другие простые инструменты (все известные грекам свойства конических сечений были изложены в многотомном труде Аполлония Пергского «Конические сечения», почти полностью сохранившегося до нашего времени).



Однако процедура вырисовывания (и достаточно аккуратного) конических сечений с последующим измерением положения их точки пересечения была сложна, и греческие математики искали другие методы решения этой задачи.

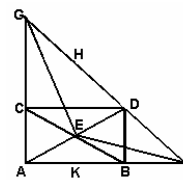
Они конструировали механические приспособления, которые могли бы при откладывании на частях такого механизма некоторых величин отмечать на других их вторые средние пропорциональные. Все эти приборы были основаны на методе вставки – требовалось таким образом расположить между двумя данными геометрическими объектами (линиями или линией и точкой) отрезок прямой, чтобы он был данной длины. Например, Платону приписывается рамка с подвижной внутренней частью. Если ее

расположить на пересекающихся под прямым углом прямых так, что



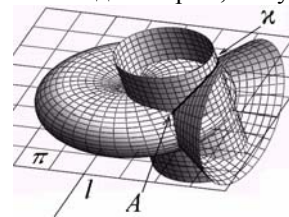
длины OA и OD равны заданным значениям (для чего и двигается внутренняя часть рамки), то OB и OC будут их вторые средние пропорциональные.

Другое изобретение принадлежит Эратосфену из Кирен (276–194 гг. до н.э.), и сохранилось не только в древнегреческих текстах, но и в виде археологических находок. Если треугольники MNG и NQH сдвинуть таким образом, чтобы точки пересечения их гипотенуз с катетами соседних треугольников находились на одной прямой с точками A и D , то эти точки отсекут на катетах два средних пропорциональных между отрезками AE и HD .

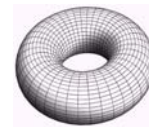


Самое позднее изобретение такого «калькулятора одной задачи» принадлежит Герону Александрийскому. Если прямую GF вращать вокруг точки D таким образом, чтобы GE стало равно EF , то отрезки GC и BF окажутся двумя средними пропорциональными между AB и AC .

Для решения задачи об удвоении куба греческими математиками применялись и другие, более сложные методы. Например, Архит из Тарента (ок.428–ок.350 гг. до н.э.) предложил решать эту задачу, используя точку пересечения трех поверхностей: тора с внутренним нулевым диаметром, конуса и цилиндра. Расстояние от проекции точки пересечения A на плоскость π до центра тора и давало решение задачи. Конечно, Архит не говорил о поверхностях: он описывал совместное движение вращающейся полуокружности (образующей верхней половины тора), вращающейся прямой (образующей конуса) и о той точке, в которой



проекция их точки соприкосновения в процессе движения пересечет окружность на плоскости π . Позднее ученик Архита Евдокс исследовал свойства проекции кривой k пересечения тора и конуса на плоскость p и назвал ее «кампила».



[Тор – это геометрическая фигура, похожая на бублик или пончик. Поверхность тора получится, если вращать вдоль окружности другую окружность меньшего диаметра в положении, перпендикулярном большей ок-

ружности. Тор – это простейшая неодносвязная фигура (т.е. ее нельзя никакими деформациями без разрывов и склеиваний превратить в шар), и поэтому ее очень любят топологи.]

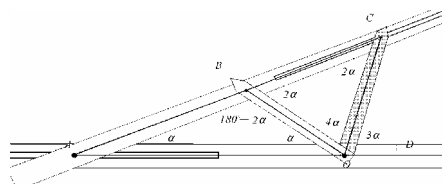
Кроме кампилы, для решения задачи об удвоении куба использовались и другие кривые, с помощью которых можно было производить вставку: например, Никомед (ок.280–ок.210 гг. до н.э.) изобрел конхоиду и механизм для ее вычерчивания. Конхоида также применялась и для решения задачи о трисекции угла.

Задача о трисекции угла. Эта задача о делении любого угла на три равные части; естественно, она должна была решаться при помощи циркуля и линейки. Для чего?

Во-первых, время суток в Греции (и во многих других странах) делилось на «косые» часы так: 12 часов от заката до рассвета и 12 часов от рассвета до заката. Время измеряли с помощью солнечных часов, и каждый день следовало с достаточной точностью разделить тот угол, который замечала тень «стрелки» этих часов (гномона), на 12 частей. На 4 части угол разделить легко, а вот каждую четверть на три части – не получалось. Надо сказать, что из этого сложного положения древние «часовщики» выходили, разметив площадку солнечных часов специальной криволинейной сеткой, по которой в любое время года можно было с достаточной точностью определить время.

Во-вторых, из Вавилона в Грецию пришло деление круга на 360° . Греки умели строить правильные 3-х, 4-х и 5-угольники, а, следовательно, и углы 60° , 30° , 90° , 45° , 72° . Комбинируя эти углы, греки могли строить и другие, но, поскольку общий делитель всех этих чисел – 3, они могли построить угол 3° , но не угол 1° . Для этого надо было разделить угол 3° на три части, или провести его трисекцию.

Задача трисекции угла сводится к решению кубического уравнения, поскольку $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Интересно, что, несмотря на

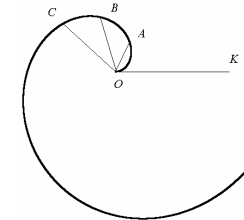


Как и для решения задачи об удвоении куба, греки использовали для

использование одной и той же кривой – конхоиды Никомеда – для решения задач об удвоении куба и о трисекции угла, греки не догадались об их общей структуре, а именно о том, что они – задачи третьего порядка.

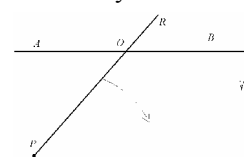
решения этой задачи механические приспособления и специальные кривые.

Для решения задачи о трисекции угла Архимед придумал чрезвычайно элегантную конструкцию, основанную на методе вставки: Если $AB=BO=OC$, то, как легко видеть, $\angle BAC = 1/3 \angle COD$. Задача о трисекции любого острого угла легко решалась с помощью этого инструмен-

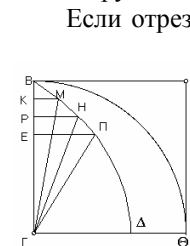


та, но более общую задачу – задачу о делении угла на любое число равных частей приходилось решать с помощью специальных кривых.

Одна из них – спираль Архимеда – была изобретена сотрудничавшим с Архимедом Кононом с Самоса. С помощью этой кривой очень легко делить любой угол в любом отношении, поскольку приращение угла пропорционально приращению расстояния от центра спирали – $CO=3AO$, и поэтому $\angle COK = 3 \angle AOK$.



Другая кривая, изобретенная Диностратом (ок.390–ок.320 гг. до н.э.) трисектриса, тоже использовала при своем построении одновременное равномерное вращение и равномерное прямолинейное движение. При равномерном движении вниз прямой AB и равномерном вращении вокруг точки P луча PR точка O движется по трисектрисе.



Если отрезок EB делится точками P и K на три равные части, то $\angle PGB$ делится лучами GM и GN на три равные части. Позднее обнаружилось, что если AB и OR движутся таким образом, что получившаяся кривая вписана в квадрат, то трисектриса позволяет решать и задачу о квадратуре круга: $\Gamma\Delta:\Gamma\Theta=\pi/4$; такая трисектриса получила название «квадратриса».

Задача о квадратуре круга. Задача о квадратуре круга и эквивалентная ей задача о вычислении длины окружности возникала во всех цивилизациях, даже в Библии есть упоминание о том, что отношение длины окружности к ее диаметру равно 3; египтяне и вавилоняне знали и более точные значения этого отношения. Греки же пытались найти точное (т.е. с помощью циркуля и линейки) решение задачи о квадратуре круга. Однако довольно быстро они догадались, что такого решения не существует; решение этой задачи стало у них ассоциироваться с бесперспективной работой.

Попытки квадрировать круг предпринимались практически с са-

мого начала развития греческой науки.

Плутарх сообщает, что Анаксагор (ок.500–428 до н.э.), последователь Фалеса, сидя в тюрьме, "начертал квадратуру круга".

Позднее современник Сократа (469–399 до н.э.) Антифон предлагал вписать в круг правильный многоугольник и затем многократно удваивать число его сторон (неизвестно, правда, какой многоугольник предполагалось взять в качестве исходного – треугольник, квадрат или шестиугольник). Антифон предполагал, что в конце концов можно получить многоугольник, равновеликий данному кругу; построить равновеликий многоугольнику квадрат можно циркулем и линейкой (с точки зрения атомиста Антифона это было возможно). Современник Антифона Бризон предлагал оценивать также площадь круга и с помощью описанных многоугольников; возможно, что при этом он полагал площадь круга равной среднему площадей вписанного и описанного многоугольников.

Гиппократ Хиосский пытался квадрировать круг, выразив его площадь через площади луночек, т.е. фигур, ограниченных дугами двух окружностей. Он обнаружил три квадрлируемых луночки, для которых можно было циркулем и линейкой построить равновеликий квадрат (всего таких луночек пять).

И только Архимед (287?–212 до н.э.), досконально исследовав проблему, фактически поставил точку в поисках решения задачи о квадратуре круга, указав строгий метод получения сколь угодно точных оценок числа π . Он показал, что площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус и получил точную оценку для π сверху и снизу, оценив отношение периметров вписанного и описанного 96-угольника к диаметру окружности: $223/71 < \pi < 22/7$, это дает два правильных десятичных знака в оценке π . Имеются сведения о том, что Архимед получал и более точную оценку для π . Позднее Аполлоний Пергский (ок.260–200 до н.э.) также нашел приближение π ; возможно, это было приближение $\pi \approx 62832/20000$.

Становление аксиоматико-дедуктивной математики. Задача о квадратуре круга сыграла важную роль в становлении математики как аксиоматико-дедуктивной науки. Исследование Гиппократа Хиосского о квадрировании луночек является наиболее ранним дошедшим до нас математическим текстом со строго построенными дедуктивными доказательствами. Результаты Гиппократа были *не так очевидны*, как факты прямолинейной геометрии (геометрии треугольников и прямоугольников) и требовали объяснения, т.е. доказательства. Поэтому можно предположить, что трактат Гиппократа является первым в исто-

рии опытом построения дедуктивных доказательств (не опирающихся пока на систему аксиом, а оперирующим рядом уже известных «очевидных» фактов). Гиппократ был первым, кто составил подробное руководство по математике, включив туда ряд аксиом и приведя в систему дедуктивный метод доказательств. После него подобные (не сохранившиеся) сочинения составлялись платониками Леоном и Фейдием.

Вопросами логики дедуктивных выводов занимался Аристотель, одно время работавший вместе с Платоном. Он установил, что если некое утверждение A следует из B , то надо установить истинность B . Истинность B может следовать из C , истинность C – из D , и т.д. Но когда в этой цепочке $A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow D \leftarrow \dots$ придется остановиться, и то утверждение, на котором мы остановимся, следует принять за аксиому.

То есть логически правильная теория должна содержать в себе некоторый набор аксиом (независимых друг от друга и непротиворечащих друг другу) и правила дедуктивного вывода из этих аксиом новых утверждений. На рубеже IV и III веков до н.э. такой подход к математике стал считаться единственно правильным, и создание математики как аксиоматико-дедуктивной теории, имеющей внутри себя возможности для дальнейшего развития, состоялось.

«Начала» Евклида. Евклид (ок.325–ок.265 гг. до н.э.) собрал и систематизировал современную ему математику, строго дедуктивно изложив ее в этом 13-томном сочинении. «Начала» представляют собой самый древний свод математических знаний, дошедший до нашего времени. Он обработал, систематизировал и изложил в строгой дедуктивной манере достижения греческих математиков V–IV веков до н.э.. Предполагают, что I–IV книги (планиметрия) – обработка «Начал» Гиппократа Хиосского; V книга (теория пропорций геометрических величин), VI книга (теория подобия) и XII книга (круглые тела) – обработка сочинений Евдокса Книдского; VII–IX книги (теория чисел и числовых пропорций) и XI книга (основы стереометрии) – обработка сочинений Архита Тарентского; X книга (теория иррациональных величин) и XIII книга (правильные многогранники) – обработка сочинений Теэтета Афинского. Знаменитый пятый постулат сформулировал сам Евклид.

Конечно, основной инструмент, которым пользуется в «Началах» Евклид, – это геометрическая алгебра, систематически и полностью изложенная в «Началах».

Важное место в «Началах» занимает теория отношений. Дело в том, что греки считали числами лишь натуральные числа (суммы менад), а то, что мы называем рациональным или иррациональным чис-

лом, обозначали как отношение двух величин. Долгое время для того, чтобы сравнить два отношения, применялся алгоритм Евклида отыскания общей меры величин, составляющих отношения (доевдоксова теория отношений). Если при этом все неполные частные (т.е. коэффициенты разложения отношения в цепную дробь) совпадали, то отношения признавались равными. Если же они отличались, то, в зависимости от того, на каком шаге алгоритма Евклида возникало различие, и в какую сторону, делался вывод о том, какое из отношений больше. Понятно, что такой подход был очень громоздким и трудновыполнимым. Наряду с изложением основных положений этой (так называемой доевдоксовой) теории отношений, Евклид излагает новую теорию отношений, созданную Евдоксом (408–355 гг. до н.э.). Она не только отвечала на вопрос, как можно сравнивать отношения чисел, но и что происходит с ними в результате арифметических операций.

Два отношения $a:b$ и $c:d$ считались равными, если для любых натуральных чисел M, N

$$aM > bN \Leftrightarrow cM > dN, aM = bN \Leftrightarrow cM = dN, aM < bN \Leftrightarrow cM < dN.$$

Такой подход к сравнению отношений был революционным прорывом в построении теории числа (пока только для рациональных положительных чисел). Современная математика знает три подхода к построению теории действительного числа: Г.Кантора (3.3.1845–6.1.1918), Р.Дедекинда (6.10.1831–12.2.1916) и К.Вейерштрасса (31.10.1815–19.2.1897). Зачатки двух из них – теории сечений Дедекинда и теории бесконечных дробей Вейерштрасса мы видим в «Началах», – это евдоксова и доевдоксова теории отношений.

Излагая теорию иррациональностей, Евклид не только доказывает, что квадратный (или кубический) корень из числа, не являющегося полным квадратом (кубом), иррационален но и дает классификацию иррациональностей в зависимости от их геометрического построения (например, $a \pm \sqrt{b}$ или $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$).

В области теории чисел Евклид излагает теорему, которая фактически утверждает, что множество простых чисел бесконечно. Доказательство ее очень просто: если бы множество всех простых чисел было бы конечным, то, перемножив их все и добавив единицу, мы получили бы новое число, которое не делится ни на одно из известных простых чисел и, следовательно, оно просто либо имеет простой делитель, отличный от уже известных. Кроме того, он доказывает теорему о виде совершенных чисел.

Последние книги «Начал» посвящены стереометрии: указаны правила вычисления числовых характеристик всех простейших объемных

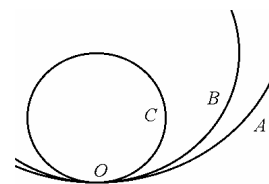
тел и их свойства, а также вычислены все числовые характеристики пяти платоновых тел.

Но не все, что было известно греческим математикам, было изложено в «Началах». Там нет таких важных разделов, как конические сечения или методы приближенных вычислений, которыми греки владели в совершенстве. Причина этого – использование выходящих за рамки геометрической алгебры методов при исследовании указанных вопросов.

Что касается круглых тел, то Евклид ограничивается доказательством того, что их площади (объемы) относятся как квадраты (кубы) линейных размеров, а также того, что объем конуса равен $1/3$ объема заключающего его цилиндра.

Метод, которым доказывались эти факты (а также определялся объем пирамиды), был предложен Евдоксом и называется «Метод исчерпывания»; его принцип лежит в основе развитого много позже интегрального исчисления.

Метод исчерпывания. В основе его лежит два факта. Первый из них – аксиома Евдокса-Архимеда: «величины имеют отношение между собой, если, взятые кратно, они могут превзойти друг друга». Кажется,

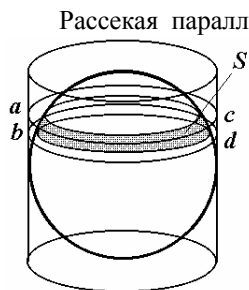


что это очевидно – но только в мире чисел. Например, роговидный угол COA больше роговидного угла BOA , но вычислить их отношение нельзя – они не удовлетворяют аксиоме Евдокса-Архимеда. Второй факт – следующая лемма: если $a > b$, то, вычтя из a больше его половины, затем из получившегося остатка больше его половины, и т.д., то через конечное число шагов получим величину, меньшую b . На основании этой леммы для определения неизвестной величины A (площади фигуры или объема тела) в исследуемый объект вписывалась последовательность фигур (тел) так, чтобы их характеристики A_k (которые вычислялись) составляли возрастающую последовательность: $A_1 < A_2 < \dots < A_n < A$, и при этом $A - A_1 < A/2$, $A - A_2 < (A - A_1)/2 < A/4$, и т.д.. Тогда по лемме разность $A - A_n$ может быть сделана меньше любого наперед заданного b . Затем отыскивалось такое B , что $B - A_n$ тоже можно было сделать сколь угодно малой; из этого следовало, что $A = B$. При этом такой многократно и разными учеными повторявшийся процесс каждый раз проводился заново: общего правила для произвольной величины A не было.

Наибольших высот в использовании метода исчерпывания достиг Архимед. Методом исчерпывания Архимед определил площадь сег-

мента параболы, площадь одного витка спирали, доказал, что площадь круга равна полурадиусу, умноженному на длину окружности и др..

Решая задачу о делении шара плоскостью на две части, объемы которых соотносятся как данные числа, Архимед свел ее к решению кубического уравнения $x^2(a-x)=Ac$; для графического решения этого уравнения он находил точку пересечения кривых $y=x^2/A$ и $y=c/(a-x)$, при этом он определил, при каких значениях A и c эти кривые пересекаются, и указал, когда они имеют одну или две общие точки. В случае, когда кривые имеют одну общую точку (касаются), Архимед нашел касательную в этой точке к обеим кривым – сейчас такую задачу решают с помощью гораздо позднее изобретенного дифференциального исчисления.



Рассекая параллельными плоскостями цилиндра и вписанного в него шара, Архимед показал, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади поверхности шара. Площадь цилиндрического пояса $abcd$ равна площади шарового пояса S . Для того, чтобы доказать это, Архимед брал очень тонкие слои между секущими плоскостями, когда шаровой пояс практически не отличим от пояса конуса; сейчас такие методы называются инфинитезимальными, и в полной

мере они разработаны были только в конце XVII века.

В обнаруженном в начале XX века «Послании о методе» Архимед раскрывает способы, с помощью которых он определял соотношения между геометрическими объектами. Он представлял эти объекты расположенными на чашах весов, и, уравновешивая эти чаши, отыскивал их соотношения. Затем, естественно, он доказывал обнаруженный факт. Так, расположив на одной чаше весов цилиндр, а на другой – равные ему по высоте и ширине полусферу и конус, он установил равенство их объемов. Зная объем конуса (как предельного случая многоугольной пирамиды), Архимед определил объем шара. С другой стороны, объем конуса можно представить как предел суммы объемов тонких дисков, радиусы которых возрастают линейно: $V \approx \pi r^2 h (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) / n^3$. Зная объем конуса, можно угадать правило суммирования квадратов. И, зная это правило, можно найти, например, площадь под ветвью параболы ($S \approx ah(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) / n^3$), что позволило Архимеду найти площадь параболического сегмента (такого сорта задачи были важны в кораблестроении – сечение греческих кораблей было близко к параболическому сегменту; Архимед исследовал

также устойчивость плавающего параболического цилиндра). Используя это же правило, Архимед нашел площадь первого витка спирали ($S \approx (2\pi/n)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) / 2$).

Архимед был не только теоретик математики, но и практик – он служил придворным механиком у сиракузского царя Гиерона. Им был создан механический планетарий, показывающий движение звезд и планет «в режиме реального времени». Когда войска римского военачальника Марцелла пытались взять Сиракузы, Архимед конструировал мощные метательные машины, подъемные краны, вытаскивающие из воды и ломавшие корабли захватчиков, а также, согласно легенде, поджигал вражеский флот системой зеркал. Римляне в ужасе прятались, как только над стенами Сиракуз появлялась какая-нибудь палка или веревка. Взять Сиракузы им удалось только с помощью предателей. Марцелл требовал, чтобы Архимеда доставили к нему живым, но безымянный римский солдат убил склонившегося над чертежом ученого. Говорят, что последние его слова были просьбой не испортить его вычисления. На могиле Архимеда был выбит шар, вписанный в цилиндр.

О том, насколько силен был Архимед в арифметико-алгебраических методах, можно судить по его «Задаче о быках» – вызову Александрийским математикам, с которыми Архимед постоянно соперничал.

В современной записи это задача в целых числах решения системы из 7 уравнений с 8 неизвестными и двумя дополнительными условиями.

$$\begin{cases} X = (1/2 + 1/3)Y + Z, \\ Y = (1/4 + 1/5)T + Z, \\ T = (1/6 + 1/7)X + Z, \end{cases} \begin{cases} x = (1/3 + 1/4)(Y + y), \\ y = (1/4 + 1/5)(T + t), \\ t = (1/5 + 1/6)(Z + z), \\ z = (1/6 + 1/7)(X + x). \end{cases}$$

Нахождение всех целочисленных решений этой неопределенной системы линейных уравнений не представляет особого труда, однако к уравнениям Архимед добавил еще два условия: $X+Y=\square$ (число белых и черных быков вместе – квадратное) и $Z+T=\Delta$ (число рыжих и пестрых быков вместе – треугольное, т.е. вида $p(p+1)/2$). Того, кто решит эту задачу, Архимед предлагал считать «превзошедшим в мудрости до конца». Действительно, условия $X+Y=\square$ и $Z+T=\Delta$ приводят к необходимости решить уравнение Пелля-Ферма $x^2 - 4729494 \cdot 2^2 \cdot 4657^2 y^2 = 1$.

Вспомогательная задача – уравнение $x^2 - 4729494 y^2 = 1$ имеет минимальное решение с 45-ю знаками в записи числа x и была решена толь-

ко в конце XIX века, а для записи всего решения задачи потребовалось бы 206545 десятичных знаков.

Текст «Задачи о быках» говорит о том, что Архимед знал о практической невозможности полного решения этой задачи и предлагал александрийским математикам показать свою мудрость, построив решение практически неразрешимой задачи.

Астрономия и тригонометрия. Вопросы ориентирования при дальних путешествиях и мореплавании постоянно интересовали греческих ученых. Египтяне и вавилоняне, страны которых расположены вдоль рек, текущих вдоль меридиана, считали Землю плоской, а небо – полусферой, накрывающей Землю. Греки, которые путешествовали от Нила до Кавказа, а позднее и в Индию, ориентировались, в основном, по звездам, и рано пришли к выводу, что земля круглая, при этом разные ученые признавали и геоцентрическую, и гелиоцентрическую систему мира (Н.Коперник считал своим учителем древнегреческого астронома Филолая). Для изучения движения звезд и создания лучших способов ориентирования по ним греческими учеными изучались углы на сфере и их числовые характеристики; позднее, когда Гиппарх (ок.180–125 гг. до н.э.) познакомил их с вавилонской астрономией, они стали вычислять и характеристики плоских углов.

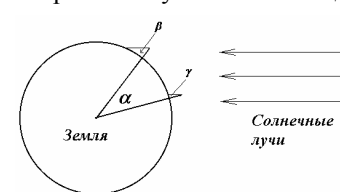
Для угла $AOB = \alpha$ вычислялось отношение стягиваемой им хорды к радиусу: $AC:OA = \sin \text{vers } \alpha$ – синус версус угла; ясно, что $\sin \text{vers } \alpha = 2\sin(\alpha/2)$. Кроме этой характеристики, использовалось и отношение стрелы дуги CD к радиусу. Греческие ученые знали достаточное количество формул, связывающих между собой характеристики углов (так, Клавдий Птолемей (ок.100–ок.178) вывел соотношение, эквивалентное формуле $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$). Составлялись таблицы хорд ($\sin \text{vers}$) с точностью до $\frac{1}{2}$ градуса. Было обнаружено, что при маленьких значениях α эквивалентны $\sin \alpha$, $\text{tg } \alpha$ и α , т.е. они практически равны, и в сложных вычислениях можно заменить $\sin \alpha$ или $\text{tg } \alpha$ на α .

Астрономические исследования повлекли за собой и исследования сферической геометрии, в т.ч. сферической тригонометрии.

Евдокс создал теорию эпициклов для описания движения планет: планеты двигались по окружностям, центры которых в свою очередь двигались по окружностям. Для гелиоцентрической системы мира такой подход позволял точно описать движение планет: при определенном соотношении скоростей вращения окружностей планеты описывали бы эллипс – реальную орбиту небесных тел.

Эратосфеном был измерен диаметр земли. Для этого он в один и

тот же час (в полдень) замерил в Александрии и Сиене (Асуан) тень, отбрасываемую шестами одинаковой высоты. Александрия и Сиена



находятся на одном меридиане, расстояние между ними известно – отсюда несложно оценить и размеры Земли. Действительно, $\alpha = \beta - \gamma$, углы β и γ измерены, длина дуги известна, значит, можно найти радиус. Астрономические вычисления проводил

также и Аристарх Самосский (ок.310–ок.230 гг. до н.э.)

Кроме измерения Земли, Эратосфен изобрел «решето Эратосфена» – метод, которым можно выписать все простые числа. Сначала следует написать ряд целых чисел; число 2 простое – вычеркнем все большие 2 четные числа: 1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ... Первое незачеркнутое число – 3, оно простое. Вычеркнем все следующие числа, кратные трем. Теперь первое незачеркнутое число – 5, оно простое. Вычеркнем все следующие числа, кратные пяти, и так далее – и в итоге останутся невычеркнутыми только простые числа.

Последним великим математиком древности был *Диофант Александрийский*, жил он предположительно в III в. н.э.. До нас дошли сочинения Диофанта «Арифметика» (т.е. теория чисел) и – не полностью – «Книга о многоугольных числах».

В «Арифметике» Диофант формулирует методы нахождения целых и рациональных решений неопределенных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами. При этом он впервые в истории математики уравнения записывает не словами и не с помощью геометрических терминов, а вводит буквенную запись уравнений.

Для неизвестной и ее степеней он вводит обозначения: $x = \zeta$ (последняя буква слова $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ – число), $x^2 = \Delta$ ($\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ – степень), $x^3 = K$ ($K\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$ – куб), $x^4 = \Delta\Delta$ – квадрато-квадрат, $x^5 = \Delta K$ – квадрато-куб, $x^6 = K K$ – кубо-куб. Образуя из степеней дроби с числителем 1, Диофант вводит первые 6 отрицательных степеней; их символ – буква χ : $x^{-2} = \Delta^{-1}\chi$. Свободный член обозначался M^0 – $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$ -единица, знак «+» не писался, для знака «-» использовалась перевернутая буква Ψ (от $\lambda\acute{\epsilon}\iota\psi\omicron\varsigma$ – недостаток), вместо знака равенства – буква ι ($\iota\sigma\omicron\varsigma$ – равно).

Например, уравнение $x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$ записывалось так:

$$K^3 \alpha \zeta \eta \Delta \Delta^{-1} \epsilon M^0 \alpha \iota \zeta \alpha.$$

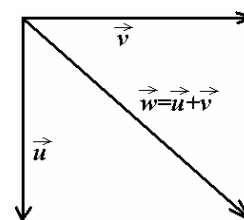
Поскольку обозначение было только для одной переменной, а пе-

ременных бывало несколько, то для каждой переменной оговаривалось ее место в уравнении. Решение уравнений часто выражалось с помощью параметра – меняя параметр, можно было получать различные решения. Здесь Диофант говорил: возьмем, например, число 2, – и было ясно, что с числом 3 можно делать те же вычисления.

Кроме правил решения уравнений, Диофант формулирует правила действий со степенями (что будет, если их перемножить и разделить – но в пределах от –6 до 6), а также правила арифметических действий с отрицательными числами. Кроме того, Диофант отошел от того, чтобы считать числами только целые величины: он оперирует с дробями как с целыми числами, не называя их отношением чисел. Видимо, «Арифметика» Диофанта, отличающаяся по своему отношению к понятию числа ото всех других греческих сочинений, создана под влиянием вавилонской математики, где встречались подобные задачи (но на более примитивном уровне).

После Диофанта новых идей и методов в греческой, а позднее и в византийской математике не возникало, ученые работали над усовершенствованием и классификацией уже созданных математических теорий. Работа греческих математиков позднего эллинистического периода (например, Теона Александрийского и его дочери Гипатии, растерзанной христианскими фанатиками) были связаны с комментированием ранее созданных математических теорий. Причиной этому было то, что Великая Греция уже была не Великой, да и задачи, которые ставила практика, существенно не менялись: новые технические идеи не были востребованы – для их развития не было пока экономических условий. Изобретенный Героном Александрийским паровой двигатель воспринимался как игрушка, так же, как и другие описанные им замечательные гидравлические, механические и действующие на принципах использования подъемной силы теплого воздуха изобретения; созданные греческими астрономами и механиками сложные технические устройства расчета движения небесных тел были забыты и заменены более простой в использовании астролябией. А сама математика пока еще не умела ставить перед собой новых задач: все ее методы и теории ориентировались на решение конкретных задач.

Но самое главное – греческая математика была статичной. В ней не рассматривалось движение как функция времени (хотя ученые много обсуждали, что есть движение, и что приводит тела в движение). И это несмотря на то, что в небольшой работе псевдо-Аристотеля (неизвестного автора, которого сначала считали Аристотелем) «Механические проблемы» говорится о том, что сумма двух перпендикулярных



движений представляет собой диагональ прямоугольника, построенного на этих движениях (параллелограмм скоростей), а Герон сообщает обратное: любое движение может быть представлено как сумма двух перпендикулярных движений.

Эта идея, как и многие другие опережающие свое время идеи греческих ученых, в дальнейшем оказала большое влияние на развитие математики.

Математика Средневекового Востока.

Китай. Китайская цивилизация возникла в начале II тысячелетия до н.э., на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн реки Янцзы. Ко времени эпохи Инь (XVIII–XII вв. до н.э.) относятся первые дошедшие до нас китайские письменные памятники; к XIV в. до н.э. относятся наиболее ранние обозначения цифр. В XIII–XII вв. до н.э. посуда украшалась геометрическими орнаментами, например изображениями правильных пяти-, семи-, восьми- и девятиугольников. В это же время началась постройка Великой китайской стены, которая должна оградить царство Инь от кочевников (стену легко мог преодолеть пешеход, но не кочевник с лошадьми и повозками); строились дороги и каналы. Однако в XII в. до н.э. кочевые племена захватили царство Инь и основали новое царство, приняв культуру завоеванного народа. К этому времени относится деятельность знаменитого философа Конфуция (Кунцзы, 551–479 до н.э.), а также возникновение математики и астрономии в Китае. Астрономы работали над согласованием общеупотребительного лунного календаря с солнечным, появились первые учебники математики, которые не дошли до нас, но, видимо, легли в основу классической «Математики в девяти книгах».

Первые сохранившиеся до нашего времени древнекитайские тексты относятся к концу I тысячелетия до н.э. Это объясняется тем, что в 213 г. до н.э. император Ши Хуан-ди приказал сжечь все книги. Но позднее (II в. до н.э. – I в. н.э.) древние книги стали восстанавливать. Ко II в. до н.э. относится изобретение бумаги, а также создание наиболее древних из дошедших до нас сочинений – математико-астрономического «Трактата об измерительном шесте» и «Математики в девяти книгах».

В древнем Китае преподаванию математики было отведено видное место. Математика требовалась не только торговцам, проектировщикам строительных работ и ремесленникам, но и чиновникам, ведающим финансами и

придворным церемониалом (время любого действия императора должно было быть согласовано с расположением, – благоприятным или нет, – звезд). Ко второй половине I тысячелетия н.э. были серьезно поставлены математическое образование и экзамены. Для занятия чиновником государственной должности требовалось сдать экзамены, в том числе и по математике. Были изданы и переиздавались в течение многих веков «Десять классических трактатов», первые два из них – «Трактат об измерительном шесте» и «Математика в девяти книгах», а последующие были написаны в III–VI вв.

Арифметика и нумерация. Арифметические действия производились на счетных досках, и поэтому надобности в таблицах сложения и вычитания не было; зарифмованную таблицу умножения от 9 до 1 без повторов ученики заучивали, распевая ее. Существовали и более сложные таблицы, например, m^2n^2 , m и n от 1 до 9.

Умножение также проводилось на досках, при этом сначала умножали старшие разряды, а затем – младшие. Промежуточные вычисления убирались с доски, поэтому результат счета проверить непосредственно по записям было невозможно.

Первыми дробями, которыми пользовались китайцы, были $1/2$, $1/3$, $2/3$ – половина, малая и большая половина. При делении на дроби китайские математики интерпретировали это деление как задачу о дележе между несколькими людьми (правда, число людей было дробное). Позднее, когда делили дробь на дробь, их приводили к общему знаменателю: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$.

Уже в III в. китайцы, пользовавшиеся десятичной системой, стремились все приближенные значения выражать десятичными дробями; например, при извлечении корней они использовали соотношение $\sqrt{A} = \sqrt{A \cdot 10^{2k}} / 10^k$.

«Математика в девяти книгах» – самый древний китайский математический трактат, окончательную редакцию которого сделал Чжан Цан (ум. в 150 г. до н.э.). Эта книга предназначалась землемерам, строителям, ремесленникам, чиновникам и торговцам. В ней имеется 246 задач с решениями; решения не объясняются. В книге есть задачи на определение площадей различных плоских фигур, задачи на пропорции, задачи на деление в данном отношении, и задачи на определение стороны квадрата или прямоугольника по площади или по площади и другой стороне. Кроме того, есть задачи по определению объемов стен, каналов, рвов, плотин и оценке необходимого для этого числа рабочих. Решают-

ся и задачи по «справедливому» распределению по уездам поставок, налогов и пр., а также более сложные задачи. Две книги посвящены решению систем линейных уравнений, есть и задачи на применение теоремы Пифагора.

Кроме «Математики в девяти книгах», в древнем Китае был составлен Лю Хуэем «Трактат о морском острове» (III в.), посвященный определению расстояний и высот недоступных предметов с помощью геометрии. Тогда же Сунь-цзы составил «Математический трактат», посвященный арифметике и методам решения систем линейных уравнений. В VII веке Чжень-фан составил сборник из десяти математических трактатов, куда частично вошли и тексты девятикнижия.

Правило двух ложных положений. Это правило из Китая попало в Индию, а затем – в арабские страны и Европу, где называлось «индийским». При решении уравнения $ax=b$ бралось два приближенных значения для x – одно с избытком, а другое – с недостатком: $x_1 < x < x_2$ и вычислялись ошибки этих решений: $y_1 = ax_1 - b$, $y_2 = ax_2 - b$. Из пропорции $(x_1 - x_2) : (x_2 - x) = y_1 : y_2$ следует: $x = (x_1 y_2 - x_2 y_1) / (y_2 - y_1)$. Числитель и знаменатель этой дроби легко вычислялись по выложенной на счетном столе таблице $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Подобные вычисления использовались китайцами и

при решении других задач.

Решение уравнений. Для решения системы линейных уравнений китайцы также использовали таблицу коэффициентов, но уже не квадратную (при этом они всегда стремились избавиться от дробных коэффициентов). Вот пример из «Математики в девяти книгах»: уравнения домножаются на 2 и 3, чтобы не было дробей; затем составляется матрица и преобразовывается так: - первый столбец умножается на 2, и из него два раза вычитается второй столбец. Из полученной матрицы – записи преобразованной системы – имеем: $y=24$, $x=36$. Т.е. применяется *метод Гаусса*.

При решении систем линейных уравнений и в других задачах китайцы широко пользовались отрицательными числами и знали их свойства; сохранились таблицы с правилами действий над отрицательными числами, например: $(\pm a) \mp (\pm b) = \pm(a \mp b)$.

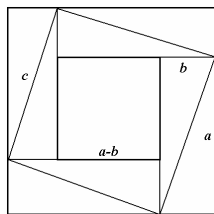
Решая сводящиеся к квадратному уравнению системы уравнений

вида $\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a; \\ y \mp x = b \end{cases}$, китайцы старались свести их к линейным или не-

полным квадратным (например, $Ax^2=B$). Также они решали квадратные стандартным методом (через дискриминант), не выписывая этот метод явно.

Умели они и делать различные подстановки в уравнения высших степеней таким образом, что порядок уравнения снижался (многочлен разлагался на сомножители).

Другие задачи. Кроме алгебраических, китайцы решали некоторые теоретико-числовые задачи, для астрономических прогнозов разработали более точный, чем в Вавилоне, метод интерполирования (замены на некоторых интервалах) сложной функции – для приближения функции они использовали не линейную, а квадратичную функцию, – такую же, какая используется сейчас в вычислительной математике. Решались также некоторые задачи на прогрессии.



Геометрия. Китайцы виртуозно применяли в практических задачах теорему Пифагора, для доказательства которой просто рисовалась картинка. Многие задачи, сводящиеся к ней, предлагают определить размеры некоторого объекта по его отклонению от вертикального положения – эти задачи существовали и в вавилонской, и в индийской математике.

Для задач астрономии требовалось знать как можно более точное значение π – отношения длины окружности к диаметру. До н.э. считалось, что отношение квадрата диаметра к квадрату длины окружности равно $5/8$ – это соответствует приближению $\pi \approx \sqrt{10}$; это приближение встречалось потом и у арабских, и у индийских, и у средневековых китайских математиков. Позднее использовались и другие, более точные приближения, но наиболее интересный подход продемонстрировал Лю Хуэй: он вписал в окружность многоугольник и описал вокруг нее фигуру, составленную из этого многоугольника и прямоугольников, описывающих оставшиеся вне многоугольника сегменты круга. Обозначая S_n площадь вписанного многоугольника, он вывел неравенство: $S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n)$ (S – площадь круга), откуда получил, что для круга с радиусом 10 $314 \frac{64}{625} < 100\pi < 314 \frac{169}{625}$.

Позднее, как и в математике других стран, оценки π улучшались.

Математика Индии. Еще в середине III тысячелетия до н.э. в долине Инда существовала развитая цивилизация, одним из центров которой был город, раскопанный вблизи холмов Мохенджо-Даро. К VII–V вв. до н.э. относятся первые индийские письменные математические памятники.

В IV в. Северную и Центральную Индию объединила династия Гупта. В это время появляются астрономо-математические труды «сиддханты» («учения»). В царстве Гупты V–VI вв. работают Ариабхата и Варахамира, в VII в. – Брахмагупта. В VII–VIII вв. с «сиддхантами» и трудами Ариабхаты и Брахмагупты знакомятся в странах ислама.

Позднее центр науки и культуры переносится в Южную Индию. Здесь работают математики и астрономы Магавира (IX в.), Шридхара (IX–X вв.), Бхаскара (XII в.), Нараяна (XIV в.), Нилаканта (XV–XVI вв.).

Последним ярким событием научной жизни Индии перед ее завоеванием европейцами была деятельность правителя Раджпутаны (ныне Раджастан) Савай Джай Сингха (1686–1743), основавшего несколько астрономических обсерваторий в Северной и Центральной Индии и составившего астрономические таблицы.

Большинство научных трактатов индийцев написаны на санскрите – языке религиозных книг брахманов. Этот язык объединял многочисленные народы Индии, говорившие на различных языках. Только в XVII в. индийцы стали писать научные трактаты на разговорных языках: анонимный южно-индийский трактат «Йукти бхаша» («Разъяснение математики») написан на языке малайялам, а астрономические таблицы Савай Джай Сингха – на распространенном в Северной Индии персидском языке.

Сведения о математике древней и средневековой Индии весьма неполны и о некоторых этапах развития индийской математики мы можем судить только предположительно. Некоторые сведения о математике древней Индии мы черпаем из комментариев к священным книгам брахманов «Веды». В одной из таких книг, относящейся к VII–V вв. до н.э., «Шульба-сутра» («Правила веревки» – вспомним геометрическую алгебру!) излагаются способы построения алтарей и связанные с ними вычисления.

Первые «сиддханты», появившиеся в V в. н.э., имеют явно эллинистическое происхождение. «Пулиса-сиддханта» приписывается некоему Паулусе из Саинтры. По-видимому, ее автором был александрийский астроном Паулос, бежавший в Индию после разгрома научного центра в Александрии. О греческом происхождении свидетельствует и название

«Ромака-сиддханты»: жителей Восточной Римской империи часто называли ромеями (впоследствии арабы называли их румами). В сиддхантах применяются некоторые греческие термины: расстояние от центра называется «кендра» (от греческого κέντρον – центр), минута – «липта» (от греческого λεπτή). Важнейшая из сиддхант была написана Брахмагуптой около 628 г. Она называлась «Брахма-спхута-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы») и состояла из 20 книг, большая часть которых была отведена астрономии, но XII книга была специально посвящена арифметике и геометрии, а XVIII книга – алгебре.

Многие трактаты были написаны в стихах, чтобы правила, сформулированные в коротких строках, можно было заучить наизусть. Например, «Тришатика» Шридхары (IX – X вв.) получила свое название от слова «тришата» – «триста», так как содержала триста стихов. Весьма краткое стихотворное изложение, почти непонятное непосвященным, разъяснялось в комментариях.

Крупнейшему индийскому математику XII в. Бхаскаре принадлежит трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»), переписанный в XIII в. на полосках пальмовых листьев. Этот трактат состоит из четырех частей, из которых «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, «Биджаганита» – алгебре, остальные две части астрономические.

Арифметика. Вычислениями индийцы занимались на доске, посыпанной песком или пылью, а часто просто на земле, расчерчивая вычислительное поле на клетки и стирая промежуточные вычисления. Построенные по той же схеме, что и современные, арифметические операции отличались от наших только отсутствием промежуточных результатов. Для облегчения устного счета придумывались специальные приемы. Так, Шридхара для вычисления квадратов и кубов предлагал методы, которые можно записать так:

$$\begin{aligned} n^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad n^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3; \\ n^2 &= (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab; \quad n^3 = (n-1)^3 + 3n(n-1) + 1; \\ n^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1); \quad n^3 = n(n+a)(n-a) + a^2(n-a) + a^3; \\ n^2 &= (n-a)(n+a) + a^2; \quad n^3 = n + 3n + 5n + \dots + (2n-1)n. \end{aligned}$$

Уже в VI в. индийцы умели вычислять квадратные корни, основываясь на разложении двучлена в степень; корень у них назывался «пада» или «мула», по-видимому, это был перевод греческих слов βάσις и πλευρά – основание и сторона. Однако слово «мула» имеет еще одно значение – корень, и именно так оно было переведено на арабский: «джизр» – корень растения, а уже при переводе с арабского в Европе появился термин *radix* – корень (растения или квадратный корень).

С дробями индийцы умели обращаться уже во II тысячелетии до н.э.; записывались дроби как и сейчас: числитель над знаменателем, но без черты. Складывая дроби, между ними не ставили знаков, а вычитая – помечали вычитаемое точкой сверху или знаком + сзади. В смешанной дроби целая часть помещалась над числителем; при делении помещали дроби одна над другой, а при умножении – рядом. То есть запись арифметических операций была очень похожа на нашу. Знали индийцы и правила возведения дробей в степень и извлечения из них корней.

С помощью дробей индийцы решали разнообразные задачи на пропорции. Они умели решать линейное уравнение правилом ложного положения, решать уравнения с пропорциями, например,

$$a : b = c : x \quad \text{или} \quad \begin{cases} a : b = c : y \\ d : e = y : x \end{cases}.$$

Алгебра. У индийцев была хорошо развита система записи алгебраических выражений. Незвестную величину они обозначали знаком нуля, или на ее месте оставляли незаполненную клетку. Они умели записывать достаточно сложные выражения, включающие в себя в современной нотации все арифметические операции в любых комбинациях, а также произведения и отношения нескольких выражений, заключенных в скобки. У них были обозначения для операции извлечения квадратного корня, названия и обозначения для степеней неизвестного от 1 до 9; они использовали и мультипликативную, и аддитивную системы для наименования степеней: $x^5 = x^{2+3}$ и $x^6 = x^{2 \times 3}$.

С VII в. в Индии систематически использовались отрицательные числа; кроме того, они умели оперировать не только с корнями из рациональных чисел, но и из квадратичных иррациональностей, например, Брахмагупта показал, что

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Индийцы решали самые разнообразные задачи на составление линейных уравнений, многие из подобных им задач до сих пор встречаются в школьных задачниках. Например, задача Ариабхаты о времени встречи небесных светил, если известны их скорости и расстояние между ними. Были и более сложные задачи на эту же тему, когда скорости менялись как арифметическая прогрессия. Встречались и задачи с несколькими неизвестными, в которых приходилось решать систему линейных уравнений.

Были разработаны правила решений и более сложных систем, например,

$$\left\{ \sum_k x_k - x_i = c_i, \quad i, k = 1, \dots, n \right.$$

и

$$\left\{ a_i \sum_k x_k - b_i x_i = c_i, \quad i, k = 1, \dots, n \right.$$

Квадратные уравнения у индусов встречаются уже в «Ведах» и «Шульба-сутре», однако полный метод их решения встречается впервые у Ариабхаты. Ариабхата словесно формулирует решение, в котором фигурирует не дискриминант, а его четверть. Брахмагупта же формулирует правило, в котором присутствует полный дискриминант.

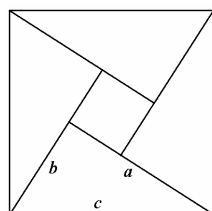
Умели индусы решать и уравнения высших степеней, предварительно преобразовывая их так, чтобы понизить степень.

Неопределенные уравнения. Как и греческие математики, индийцы решали неопределенные уравнения и системы неопределенных уравнений. Так, Бхаскара решал задачу об определении сторон прямоугольного треугольника, когда известны его периметр и площадь (эту же задачу решал и Герон Александрийский):

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ xy = S \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Решая неопределенные уравнения, индийцы, в отличие от Диофанта, искали не рациональные, а только целые положительные решения.

Они умели записывать все решения уравнения $ax+b=cu$ ($a>c>0$); для этого они раскладывали отношение a/c в цепную дробь – предпоследняя подходящая дробь этого разложения p/q давала решение: $x=(-1)^n bq+qt$, $y=(-1)^n bp+pt$, t – параметр.



смотри!

Наивысшее достижение в этой области индийских математиков – решение уравнения $ax^2+b=y^2$ и его частного случая – уравнения Пелля-Ферма $ax^2+1=y^2$.

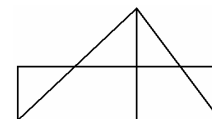
Геометрия. Конечно, индийцам была известна теорема Пифагора. На рисунке приведен чертеж и доказательство этой теоремы Бхаскарой.

Для вычисления площади четырехугольника Брахмагупта приводит известную в Египте схему: площадь равна произведению полусумм противоположных сторон, а

Шридхара сообщает, что это правило нельзя применять ко всем четырехугольникам, кроме того, Шридхара дает точное правило вычисления площади трапеции.

Брахмагупта для вычисления площади четырехугольника также пользовался формулой, подобной формуле Герона для треугольников:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ где } a, b, c, d - \text{стороны, а } p - \text{периметр четырехугольника;}$$



смотри!

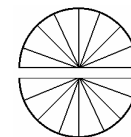
вписываемых в круг. Брахмагупта не говорит этого, но приводит правило только для равнобоких трапеций и четырехугольников с перпендикулярными сторонами.

Как и при доказательстве теоремы Пифагора, все доказательства наглядны и лаконичны. Например, «площадь треугольника равна половине высоты на основание» и «площадь круга равна половине радиуса на длину окружности» приведены на рисунках.

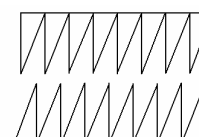
Приближенные значения для π имеются в «Пулисе-сиддханте» и у Ариабхаты. Эти приближения совпадают, но немного по-разному выражены: $\pi=3927/1250=62832/20000=3,1416$; скорее всего, эти приближения имеют греческое происхождение.

Встречается в Индии и Архимедово приближение $\pi = 22/7$.

Встречается и приближение $\pi \approx \sqrt{10}$ – оно имеет либо китайское,



смотри!



либо индийское происхождение. Получается оно так: если взять окружность радиуса 10, и вычислить приближенно в десятичной системе периметры вписанных правильных n -угольников ($n=6, 12, \dots$), то получатся числа, примерно равные $\sqrt{997}, \dots, \dots$,

$\sqrt{998}, \dots, \dots, \sqrt{999}, \dots, \dots$, откуда делается вывод, что периметр приближается к $\sqrt{1000}$, т.е. $\pi \approx \sqrt{10}$.

В области стереометрии индусы знали объем призмы, конуса и усеченного конуса, шара.

Тригонометрия. Тригонометрию индусы заимствовали у греков, у них же они заимствовали и вавилонское деление окружности на 360° . Они знали многие формулы тригонометрии, связь синуса и синуса-версуса. Ариабхата составил очень точные таблицы синусов с шагом

3°45'. Были известны правила вычисления длин дуг и хорд по различным их характеристикам.

Бесконечные суммы. Достаточно рано индусы узнали правила суммирования арифметической и геометрической прогрессии, умели находить суммы треугольных, квадратных и кубических чисел, а также суммы квадратов и кубов членов арифметических прогрессий.

В XVI веке Нарайана находил гораздо более сложные суммы.

Обозначим

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \dots + n; \quad S_n^{(2)} = S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \dots + S_n^{(1)}; \quad S_n^{(3)} = S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \dots + S_n^{(2)}; \quad \dots$$

Нарайана установил, что

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+1)} = \frac{(n+m)!}{(m+1)!(n-1)!}.$$

Если же $S_n^{(1)} = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d)$, то

$$S_n^{(m)} = a \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + d S_{n-1}^{(m)}.$$

Кроме этого, Нарайана установил элементарно-геометрическими методами (без строгого доказательства), что

$$r\varphi = \frac{r \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{r^3 \cdot \sin^3 \varphi}{3 \cos^3 \varphi} + \frac{r^5 \cdot \sin^5 \varphi}{5 \cos^5 \varphi} - \dots \quad \text{для } \varphi < 45^\circ.$$

Это фактически представление арктангенса в виде бесконечной суммы: $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ ($x = \operatorname{tg} \varphi$, $r=1$).

При $r=1$ и $\varphi = 45^\circ$ получаем: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ Г.Ф.Лейбниц (1.7.1646–14.11.1716) назвал это равенство «арифметической квадратурой круга».

Математика в арабских странах. В 762 г. второй халиф новой династии Аббасидов перенес столицу халифата в Багдад, основанный им недалеко от развалин Вавилона. Нужды ирригации, строительства и сухопутной и морской торговли требовали развития математики и тесно связанной с ней астрономии. В завоеванных государствах арабы заставили более высокую культуру, и багдадские халифы стали приглашать в Багдад виднейших ученых из покоренных стран. Большинство ученых, работавших в Багдаде в IX – X вв., были уроженцами Средней Азии (ал-Хорезми (IX в) из Хорезма, ал-Марвази (764–874) из Мерва, ал-Фаргани из Ферганы) или принадлежали к сабиям – потомкам вавилонских жрецов-звездопоклонников (Сабит ибн Корра (826–18.2.901) и его внук Ибрахим ибн Синан (908–946), ал-Баттани из Харрана (ок.850–929)).

К X в. завоеванные страны, сохраняя религиозное подчинение Багдаду, становятся фактически независимыми. Возникают новые научные центры в Бухаре и Хорезме, где воспитались такие знаменитые ученые, как Ибн Сина (Авиценна, 980–1037) и ал-Бируни (15.9.973–13.12.1048). В Каире работает Абу Камил ал-Мисри (ок.850–ок.930, Миср – арабское название Египта), а затем туда приглашается крупнейший физик и астроном средневековья уроженец Басры ал-Хасан ибн ал-Хайсам (Альхазен, 965–1040). В X в в Газне работал ал-Бируни. Крупнейший ученый второй половины XI в. Омар Хайям (18.5.1048–4.12.1131) работал в столице Сельджуков Исфахане (Иран), крупнейший ученый XIII в. Насир ад-Дин ат-Туси (ок.1135–1213) работал в Мараге (Азербайджан) – столице внука Чингисхана Хулагу.

В XV в. Среднюю Азию, Иран и ряд сопредельных стран завоевывали войска Тимура. Это также приводит к организации в столице Тимура Самарканде нового научного центра, возглавляемого внуком Тимура султаном Улугбеком. В это время в Самаркандской обсерватории Улугбека работает Гияс ад-Дин ал-Каши (ок.1380–22.6.1429). После убийства Улугбека (1393–27.10.1449) религиозными фанатиками, считавшими его еретиком, и разгрома самаркандского научного центра Али Кушчи, ученик Улугбека и ал-Каши, переезжает в Константинополь, где вступает в контакт с византийскими учеными. Другие самаркандские ученые попадают в Индию, где традиции их школы развивались в течение нескольких столетий, в частности, Савай Джай Сингхом.

Наряду с математическими центрами в Месопотамии и Сирии, Египте, Средней Азии и Иране исследования велись также в мавританских государствах на северо-западном побережье Африки и Пиренейского полуострова. Менее значительная по богатству открытий наука этих стран, так же, как, например, Сицилии, сыграла большую роль в распространении математико-астрономических знаний в средневековой Европе.

Научные труды математиков стран ислама большей частью написаны на арабском языке (подобно тому, как в Европе научные трактаты писались на латыни), именно поэтому туркменских, узбекских, персидских и др. математиков называют «арабскими», хотя точнее их было бы называть «арабоязычными». Даже Омар Хайям, известный персидский поэт, писал научные трактаты по-арабски. Однако у Сабита ибн Корры имеется несколько сочинений на родном сирийском языке, а популярная «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства» ал-Бируни написана в двух вариантах – по-арабски и по-персидски. То же относится к краткой энциклопедии Ибн Сины: ее арабский вариант

называется «Книга спасения», а персидский – «Книга знания». На персидском языке написаны некоторые сочинения Насир ад-Дина ат-Туси (18.2.1201–26.6.1274), в частности его астрономические таблицы, а его ученик Кутб ад-Дин аш-Ширази уже дал изложения «Начал» Евклида, «Альмагеста» Птолемея и «Оптики» Ибн ал-Хайсама на персидском языке. По-персидски были написаны и астрономические таблицы Улугбека и ряд сочинений ученых самаркандской школы.

В VIII – X вв., в первый период развития математики стран ислама, на арабский язык были переведены индийские «сиддханты», получившие в переводе название «Синдхинд» (Хинд – арабское название Индии), «Начала» Евклида, «Измерение круга», «О шаре и цилиндре» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Сферика» Феодосия, «Сферика» Менелая, «Альмагест» Птолемея, «Арифметики» Диофанта и ряд других сочинений. Были переведены и основные философские сочинения Аристотеля, также явившиеся источником ознакомления с достижениями греческой науки. Наряду с этим в формировании математики в странах ислама большую роль сыграли местные традиции, веками складывавшиеся на территориях Египта, Сирии и Месопотамии, Средней Азии и Ирана, а также связи с Индией и далеким Китаем. Первоначально, естественно, преобладало усвоение культурного наследия прошлого, но очень быстро сложилась своеобразная собственная математическая культура – результат слияния аксиоматико-дедуктивной греческой математики и конструктивной алгебраизированной математики Востока. Среди других течений математической мысли Востока арабская математика выделяется глубоким синтезом устремлений, направленных на решение задач практической жизни и ведущей науки той эпохи – астрономии, с интенсивной работой теоретической мысли, воспитанной на лучших греческих образцах. Последнее позволило поднять на высокий уровень научную разработку вычислительно-алгоритмических проблем и методов, стоявших на первом плане во всей восточной математике, но развивавшихся в Индии и Китае менее мощными и менее строгими средствами. Эта тенденция, характерная уже для арабской математики IX в., усиливалась вплоть до XV столетия. Ее плодом явилось значительное развитие арифметики в широком смысле слова, от решения задач коммерческого характера до теории отношений и учения о действительном числе, геометрии, в частности, столь важной для дальнейшего прогресса точных наук теории параллельных, а особенно алгебры и тригонометрии, которые впервые формируются здесь в большие самостоятельные науки. Некоторое развитие получили и инфинитезимальные методы.

Своим возникновением арабская наука была обязана греческой: после захвата многих европейских и малоазийских территорий, на которых ранее располагались греческие города, арабы получили в свои руки огромное количество трактатов греческих ученых. Эти трактаты были переведены чрезвычайно точно, и часть из них сохранилась только в арабских переводах; в тех же случаях, когда имеется и арабский, и греческий тексты, поражает практически дословное совпадение их содержания. Работа у арабских ученых над греческими трактатами обычно состояла из трех этапов: перевод – обстоятельный комментарий – развитие идей греческого автора. Таким образом, арабская наука не была самостоятельна в выборе математических тем для исследования, но, получив чисто математические греческие трактаты и не имея сведений о том, с какими практическими задачами были связаны те или иные математические методы, они воспринимали математику более абстрактно, чем греки. Так, например, греки практически никогда не рассматривали степени больше 3-х, поскольку это – объем (в крайнем случае, когда объем или площадь иррациональны, можно вычислить их квадрат – отсюда 4-я и 6-я степени у Диофанта и Герона Александрийского). Арабоязычные математики не имели таких ограничений, и рассматривали произвольные степени. Так, ал-Караджи (13.4.953–ок.1029) исследовал уравнения – обобщения тех, что решал Диофант, с произвольными натуральными показателями степеней.

Большую роль в дальнейшем развитии физико-математических наук в странах Востока и в Европе эпохи Возрождения сыграли энциклопедические труды Ибн Сины (Авиценны). Не будучи математиком-исследователем, он в концентрированном виде изложил известную в его время математику и механику, обратил внимание ученых на пятый постулат Евклида, а также развил собственное учение о движении, отличное от аристотелевского.

Арифметика. В странах ислама были распространены два типа нумерации: буквенная и позиционная, заимствованная у индийцев; использовали вавилонская шестидесятеричная и индийская десятичная системы.

Буквенную нумерацию арабы называли «абджад» (по первым четырем буквам: алиф, ба, джим, дал) и «джумал» («суммы», так как числовое значение каждого слова равно сумме числовых значений входящих в него букв); в этой нумерации были знаки для 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000.

Десятичная позиционная нумерация появилась впервые в книге Мухаммада ал-Хорезми (787 – ок. 850) «Об индийском счете», где он

описывает девять индийских цифр и «маленький кружок, наподобие «о», чтобы по нему знали, что разряд... пуст»; название этого знака – «сыфр».

Арифметические действия производились в шестидесятеричной (научной) и десятичной (бытовой) системе. Они производились на счетной доске, и, например, при умножении множитель после умножения множимого на один из разрядов сдвигался вправо. В руководстве ал-Хорезми описаны также операции над дробями и способ извлечения квадратных корней. Переведенный на латинский язык, трактат ал-Хорезми сыграл большую роль в развитии европейской математики, а латинизированное имя автора *Algorismus* или *Algorithmus* дало слово «алгоритм».

Для дробей в арабском языке не было специальных названий, кроме аликвотных дробей от $1/2$ до $1/10$; остальные дроби назывались « n частей из n » или «одна часть из n ». Кроме того, дроби рассматривали и как отношение чисел, например, умножить a на b значило найти такое q , чтобы $q:a=b:1$ (при умножении целых чисел произведение рассматривали как многократное сложение). Дроби записывали как в Индии: знаменатель над числителем, а целая часть – еще выше. В бытовых расчетах использовали правила, сходные с египетскими: дроби сначала представляли в виде суммы аликвотных дробей, а если это было сложно – то находили приближенное значение, выражавшееся аликвотными дробями, например, $3/17 \approx 1/6 + 1/6 \cdot 1/10$. В сложных астрономических расчетах, где использовалась шестидесятеричная система, применяли таблицу умножения до 59×59 и правила обращения со степенями вроде $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Изложенные ал-Хорезми правила извлечения корней были позднее усовершенствованы Омаром Хайямом (не только математиком, но и великим поэтом, писавшим стихи по-персидски). Эти приемы были основаны на правилах возведения в степень бинома – двучлена $((a+b)^2, (a+b)^3)$. Для извлечения квадратного корня число в позиционной записи разделялось точками или штрихами на пары, начиная с конца. Затем находилось наибольшее число, квадрат которого не превосходит самой старшей группы цифр – это была старшая цифра ответа. Вторая цифра подбиралась из того соображения, что вторая по старшинству группа цифр примерно в 2 раза больше произведения уже найденной цифры и той, которую надо найти. Затем операция повторялась; сейчас такой способ вычисления корней называется схемой Горнера; этот метод был заимствован из индийской и китайской математики. Умели арабские ученые вычислять и корни высших степеней, а для этого им надо было

знать бином Ньютона, т.е. правило возведения в любую натуральную степень бинома.

Для вычисления биномиальных коэффициентов можно применять треугольник Паскаля.

В каждой строчке числа (кроме единиц, стоящих по сторонам треугольника) равны сумме пары чисел, расположенных над ними; каждая строчка – это список биномиальных коэффициентов. Например,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

				1					
					1		1		
			1		3		2		1
		1		4		6		3	
	1		5		10		10		5
1		6		15		20		15	
	1		6		15		20		15
		1		5		10		10	
			1		4		6		3
				1		3		2	
					1		1		
						1			

Треугольник Паскаля

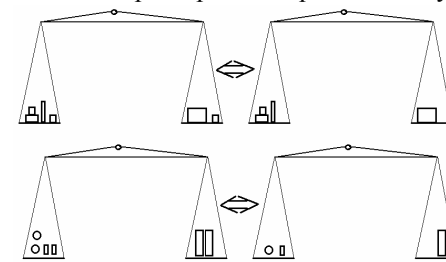
Арабские ученые умели находить коэффициенты бинома до 12 степени.

Алгебра. Арабские ученые умели производить простейшие операции с корнями различных степеней, они знали простейшие свойства корней, как, например, $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b^n}$; они умели преобразовывать иррациональности.

Были они знакомы и с доевдоксовой теорией отношений, умели раскладывать отношения в цепную дробь. А вот отрицательные числа в арабской математике не использовались. Поэтому у них было несколько видов квадратных уравнений, например:

«Квадраты и корни равны числу»: $ax^2 + bx = c$;

«Квадраты равны корням и числу»: $ax^2 = bx + c$, и т.д.



Все уравнения и математические преобразования записывались словесно, никакой символики в арабской математике не использовалось. Для операций с уравнениями использовались приемы «алджабр» (восполнение, т.е. перенос отрицательных и подобных членов в другую часть уравнения), и «ал-мукабала» (противо-

поставление или сокращение уравнения на число); от термина «ал-джабр» произошло слово «алгебра». Эти термины пришли в математику из теории взвешивания: рисунки весов иллюстрируют применение «ал-джабр» и «ал-мукабала».

Например, применение «ал-джабр» к уравнению $2x^2+100-20x=58$ дает $2x^2+42=20x$, а применение «ал-мукабалы» – $x^2+21=10x$. «Ал-джабр» и «ал-мукабала» пришли в математику из теории взвешивания: с двух чашек уравновешенных весов можно одновременно снимать два одинаковых предмета и можно оставлять на чашках равные доли того, что было уравновешено.

Решения квадратных уравнений часто иллюстрировались, как и в греческой математике, геометрическими построениями. При этом находились также и корни уравнений, в которых коэффициенты были квадратичными иррациональностями.

Кроме квадратных, арабские математики решали и кубические уравнения. Для этого находились точки пересечения конических сечений. С их же помощью решалась и задача и трисекции угла. Однако задача об удвоении куба арабских ученых не интересовала: они умели находить значение кубических корней с любой точностью; кубические уравнения решались приближенно с высокой точностью. Например, возникавшее в задаче определения синуса 1° уравнение $x^3+q=px$ решалось численно решения методом простой итерации. Наиболее удачное изложение методов решения кубических уравнений дал Омар Хайям; он впервые представляет алгебру как самостоятельную науку, нередко называет ее «ал-джабр». Позднее ал-Каши описывает методы решения с помощью конических сечений и уравнений четвертой степени.

Теория чисел. Арабские ученые мало занимались теорией чисел. Но, например, Абу Камил нашел все 2676 целых решений системы

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 100; \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v = 100. \end{cases}$$

Арабские математики впервые высказали предположение, что уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет отличных от нуля целых решений; позднее Пьер Ферма предположил, что и уравнение $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ не имеет целых решений (знаменитая теорема Ферма, доказанная совсем недавно чрезвычайно сложными математическими методами).

Геометрия. Желая улучшить результат Архимеда, ал-Каши нашел 18 правильных знаков числа π , причем он заранее указал точность, которой хотел достичь, и вычислил периметры правильных вписанного и

описанного 3×2^{28} -угольника. Он высказал предположение о том, что π иррационально.

Для нужд ремесленников и землемеров арабские математики развивали геометрические методы построения различных фигур, в том числе конических сечений. Ими решалась задача о сопряжении кривых, т.е. построения, например, параболы и окружности так, чтобы они касались (такие задачи были нужны при проектировании куполов дворцов и храмов).

Большой интерес в странах ислама уделялся теории параллельных, т.е. пятому постулату Евклида. Ученых интересовало, можно ли обойтись без этого постулата, доказав его с помощью других аксиом и постулатов; они исследовали вопрос о том, какие именно факты следуют из пятого постулата Евклида, а какие могут быть доказаны и без него. Они были близки к тому, чтобы создать неевклидову геометрию, в которой пятый постулат звучит по-другому.

Тригонометрия. Тригонометрия в виде вычисления хорд, стягиваемых углами, пришла к арабам из Греции. Арабские математики умели обращаться с тангенсами и котангенсами (тень и обращенная тень), умели от синуса перейти к синусу версусу и обратно, рассматривали линии секанса и косеканса ($\sec x = 1/\cos x$, $\csc x = 1/\sin x$). Составлялись очень точные тригонометрические таблицы, самой известной из них является «Канон Мас'уда» ал-Бируни. При решении задач о вычислении движения небесных тел приходилось решать трансцендентное уравнение $a=t-k \sin t$, сейчас оно называется уравнением Кеплера. Ал-Марвази решал его методом простой итерации: $t_1=a-k \sin t_0$, $t_2=a-k \sin t_1$, $t_3=a-k \sin t_2$, ...

Кроме того, исследовалась и сферическая тригонометрия.

Инфинитезимальные методы. Следуя приемам, изобретенным Архимедом, арабские ученые вычисляли различные площади и объемы, сначала разбивая их на маленькие кусочки, заменяя эти кусочки примерно равновеликими прямоугольниками или призмами, и вычисляли, что получится, если размер разбиения делать все меньше и меньше. Таким образом они, с блеском используя метод исчерпывания Евдокса, нашли объемы тел вращения, образованных коническими сечениями, а также площади, которые ограничивают конические сечения и прямые.

Математика в средневековой Европе и в эпоху возрождения. В середине I тысячелетия н.э. произошел распад римской империи, возникает Византийское государство; в 395 г. Римская империя официально разделилась на Западную и Восточную, христианство получает равноправие с язычеством. Начался период феодализма.

Время, длившееся с V–VI вв. около тысячи лет, именуется Средними веками. Эта историческая эпоха делится на три главные стадии.

В столетия раннего феодализма, примерно до XI в., возникали небольшие феодальные государства, постоянно между собой враждовавшие; многие просуществовали недолго. Единственным долговечным образованием явилась Священная Римская империя, в нее входили многие феодальные государства Германии, Голландии, Австрии, Чехии, Франции и Италии и т.д.

На стадии развитого феодализма, с XI по XV в., ремесло отделяется от сельского хозяйства, растут и крепнут города, все большую силу приобретают ремесленные цеха и купеческие гильдии, ширятся торговля и денежное хозяйство. Возникают и растут прочные монархии, такие, как Англия, Франция, Испания, постепенно отвоевывавшая занятые маврами области Пиренейского полуострова, и другие. Конец стадии развитого феодализма был ознаменован в Западной Европе крупными народными восстаниями, нередко принимавшими форму религиозных «еретических» движений.

Наконец, на XV – XVII вв. приходится разложение феодального строя, зарождение в среде городского бюргерства – новой буржуазии и в среде ремесленников – пролетариата, образование основных современных наций, крестьянская война и реформация в Германии, борьба гугенотов и католиков во Франции, расцвет – прежде всего в Италии – Возрождения и первые буржуазные революции в Нидерландах, а затем в Англии.

Когда в Западной Римской империи вторгшиеся племена кельтов, германцев и славян образовали вместе с местным населением свои государства, подвергшиеся в середине V в. нашествию гуннов, от прежней цивилизации остались только немногие едва прозябавшие города и христианство. Экономический, технический и культурный уровень долгое время был очень низким. Связи с Востоком на некоторое время были почти полностью прерваны. Церковь начала с того, что полностью отвергла культуру греков и римлян, как порождение язычества. Но когда она вступила в союз с государством, ей пришлось в конце концов заимствовать и даже развивать некоторые элементы «языческой» культуры и науки. Впоследствии монастыри, первый из которых был учрежден в Египте около 340 г., явились важными центрами распространения знаний и просвещения.

Основой прогресса культуры и науки в Средние века служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъем – особенно со второй половины XI в. – городов, улучшение ма-

териального положения и усиление общественной роли горожан. Развивались торговые, судоходство, появляются изобретения (и импорт изобретений с Востока), с Востока завозятся и распространяются греческая литература, делаются морские открытия, достоянием общества становятся магнитная стрелка, книгопечатание, литеры, льняная бумага (позднее бумага из хлопка), порох, очки, механические часы и многое другое.

Делаются переводы на латынь (ставшую в Западной Европе общим языком ученых) арабских сочинений, в том числе изложений, переработок и переводов греческих авторов. Начиная с XI в. появляются университеты.

Наибольшие достижения в области науки принадлежат народам более развитых государств – Италии и Франции, Англии и Германии, хотя некоторые замечательные открытия были сделаны и в других странах. Так, Польша дала в XIII в. известного оптика Витело, а в XVI в. – великого Николая Коперника.

Восточная Римская империя сохраняла государственность еще почти тысячу лет, хотя территория ее со временем уменьшалась под ударами славян, арабов и турок. И в Византии с середины IX в. укрепляется феодальный строй, причем роль церкви во всей жизни страны оказывается особенно сильной. Наука в Византии развивается очень медленно. К концу Средних веков в развитии наук восточно-христианские страны значительно отстали от стран Западной Европы.

XV и XVI века вошли в историю Европы под названием «эпохи Возрождения», при этом имеется в виду возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. На самом же деле эта эпоха характеризуется гораздо более глубокими преобразованиями в жизни всего общества: именно в это время еще в недрах феодального строя возникает новый общественный строй – буржуазное общество. В промышленности появляются мануфактуры, требующие технических усовершенствований и изобретений, развивается книгопечатание и торговля, приведшая к росту мореплавания и к великим географическим открытиям.

Образованные люди прилагают свои силы в самых различных областях искусства и науки. Леонардо да Винчи был не только великим живописцем, но и великим математиком, механиком и инженером. Альбрехт Дюрер был живописцем, гравером, скульптором, архитектором и, кроме того, изобрел систему фортификации.

Исторически сложилось так, что именно в математике начинают искать последний критерий истины. С одной стороны, чисто практи-

ческое преимущество, которое получал купец над конкурентами даже при небольшом улучшении способов вычисления своих координат на море, а с другой стороны, религиозные традиции, утверждавшие, что Вселенная построена богом по математическому плану, ставили математику в центр внимания. И если в начале Средних веков «математиками» называли людей, занимавшихся астрологией, и подвергали их преследованию как колдунов и чернокнижников, то Леонардо да Винчи пишет, что «тот, кто порочит высшую достоверность математики, тот питается сумбуром». И хотя по мере роста действительного могущества математики такие напыщенные декларации сменяются более трезвым пониманием ее возможностей, математика уже в то время становится и остается основным инструментом европейской культуры.

В XV–XVI вв. математика развивается главным образом в Италии, Франции и Германии, к которым в конце XVI в. присоединяется Голландия, переживавшая в это время первую в Европе буржуазную революцию.

Математика в Византии. Византия была наследницей Греции по языку и по населявшим ее народам. Долгое время в ней существовали эллинистические философские школы; наиболее известными были школы неоплатоников и неопифагорейцев. Неоплатоник Прокл Диадох в V в. написал обширный комментарий к I книге «Начал» Евклида, изложив там значительный объем прочитанных им у Евдема сведений по истории греческой математики; сам же Прокл пытался доказать пятый постулат Евклида.

В начале VI в. Евтокий Аскалонский (ок.480–ок.540) написал комментарии ко многим сочинениям Архимеда и Аполлония; в комментариях он поместил много историко-математических сведений. Комментировал работы Евклида и Аристотеля Симпликий (ум.549).

После запрета в VI в. языческой философии многие ученые эмигрировали в Иран и Сирию.

Первыми христианскими учеными были Анфемий из Тралл (ум.534) и его ученик Исидор из Милета. Их исследования касались оптики, правильных многогранников и конических сечений.

Михаил Пселл (1018–после 1078) занимался арифметикой и геометрией. Он ввел обозначения для степеней, но показатели степени записывались не аддитивно, как у Диофанта ($x^6 = x^{3+3}$ – кубо-куб), а мультипликативно ($x^6 = x^{3 \times 2}$), и простые степени были у него «невыразимыми»: x^5 – первое невыразимое, x^7 – второе невыразимое (x^2 и x^3 не требовали специального названия). В XIII в. Максим Плануд написал комментарии к «Арифметике» Диофанта и «Арифметику по образцу

индийцев», где вводит 9 цифр и знак «тѣфра». Иногда позиционная система у византийцев применялась с использованием ионийской нумерации для первых 9 знаков.

В XIV в. начинают переводиться арабские астрономические трактаты. В 1453 г. Константинополь взяли турки. Часть византийских ученых бежала на Запад.

Математика в Западной Европе. Первым самостоятельным ученым Западной Европы был Леонардо Пизанский Фибоначчи (сын Боначчи, 1180–1240). В «Книге абака» (*Liber abaci*) он излагает арифметику, где сообщает о преимуществе позиционной системы счисления перед римской нумерацией. Он впервые вводит рекуррентную (или возвратную) последовательность чисел на примере: пара кроликов ежемесячно приносит пару, которая через месяц приносит новую пару кроликов. Сколько кроликов будет через год? Ответ: $1+1+2+3+5\ldots+144=376$; n -й член последовательности выражается через предыдущие: $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$. Интересно, что сейчас эти «числа Фибоначчи» находят применение в самых различных областях естествознания.

Леонардо дает также методы решения некоторых систем линейных уравнений и некоторых задач из «Арифметики» Диофанта. Кроме того, он описывает процедуру вычисления кубического корня, по видимому, заимствованную из арабской науки.

Леонардо решает и квадратные уравнения с помощью «алгебры и ал-мукабалы», многие примеры заимствованы из арабских источников. Изложение уравнений словесное, но иногда встречаются и геометрические термины, и обозначения: квадрат – *census* или *quadratus*, неизвестная – *res*, корень – *radix*, данное число – *numerus* или *denarius* – все это переводы арабских терминов. Решаются и уравнения с иррациональными коэффициентами.

Кроме «Книги абака», Фибоначчи написал и книгу по геометрии, содержащую доказательства ряда теорем по измерению величин, арифметике, планиметрии и стереометрии. Он находит оценку

$$\frac{1440}{458} \frac{4}{9} < \pi < \frac{1440}{458} \frac{1}{9}, \text{ откуда } \pi \approx \frac{1440}{458} \frac{1}{3} = 3,1418\ldots$$

Леонардо решал также и диофантовы уравнения.

Иордан Неморарий (ум.1237), механик и математик, впервые в средневековой Европе начал вводить некоторые буквенные обозначения в запись алгебраических задач. В это же время начинает развиваться физика: главный вопрос – это вопрос о движении.

Томас Брадвардин (ок.1290–1349, в конце жизни епископ Кентерберийский) занимался и вопросами физики, связанными с ускоренным

движением и с движением с сопротивлением. Он интересуется связью между дискретным и непрерывным, насчитывая пять исторически сложившихся концепций.

Вопросами движения занимался и Ричард Суайнсхед (ок.1350), он находит с помощью инфинитезимальных методов путь, пройденный при равноускоренном движении (т.е. фактически вычисляет $\int_a^b (v+kt)dt$). Кроме того, он изучает случай, когда ускорение скачкообразно меняется на различных промежутках времени.

Во Франции Николя Орем (ок.1323–1382) исследует пропорции и выводит правила действия с дробными степенями. Он также изучает и совершенствует исследования Суайнсхеда. Кроме того, он открыл, что $1+1/2+1/3+1/4+\dots+1/n+\dots=\infty$: разбив этот числовой ряд на 1, 2, 4, 8, и т.д. слагаемых, он замечает, что $1/3+1/4>1/2$, $1/5+1/6+1/7+1/8>1/2$, и т.д., и, значит, вся сумма больше, чем $1+1/2+1/2+1/2+\dots+1/2+\dots=\infty$. Исследованный Оремом числовой ряд играет важную роль в математике и называется «гармоническим».

Лука Пачоли, кроме того, что он способствовал распространению по всей Европе позиционной системы счисления, ввел в математику свои обозначения в формулах. Для корней он вводит знак $\sqrt{x}$, т.е. $\sqrt{x}$ или $\sqrt{x_2}$ – квадратный корень, $\sqrt[3]{x}$ или $\sqrt[3]{x_{cuba}}$ – кубический, $\sqrt[4]{x}$ или $\sqrt[4]{x_4}$ – корень четвертой степени. Для степеней переменных он также вводит компактные обозначения; система его обозначений, как и у Михаила Пселла, была мультипликативной.

Во Франции Николя Шюке (ум.ок.1500) вводит термины «миллион», «биллион»; сопоставляет арифметическую и геометрическую прогрессии. Угадав, что $a/b < (a+b)/(b+d) < c/d$, если $a/b < c/d$, он использует это для решения уравнения правилом двух ложных положений. Обозначая корни знаком $\sqrt{x}$, $\sqrt[2]{x}$, $\sqrt[3]{x}$, он обозначает первую степень $\sqrt{x_1}$, для знаков «+» и «-» он использует $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$: $\sqrt{14+\sqrt{180}}=\sqrt{x}.14.\tilde{p}\sqrt{x}.180$.

В Германии появляются коссисты – от слова *cosa* (вещь) – которые вводят обозначения: $x=r$, $x^2=z$, $x^3=c$, $x^4=zz$, $x^5=rzz$, $x^6=zzz$, и т.д.; свободный член – $\emptyset$. Терминология коссистов применялась достаточно широко; ее использовал автор первой русской «Арифметики» Л.Ф.Магницкий.

Кубические уравнения и мнимые числа. В Италии был обычай устраивать научные турниры: два человека давали друг другу вопросы, и побеждал тот, кто смог решить предложенную задачу. На одном из та-

ких турниров встретились Николо Тарталья (1500–1557) и некий Фиор, ученик Сципиона дель Ферро (1456–1526). Дель Ферро нашел способ решения в радикалах кубического уравнения $x^3+ax=b$, к которому можно свести любое кубическое уравнение, и рассказал свой секрет Фиору. Тарталья перед турниром сам нашел такой способ, и победил Фиора 12 сентября 1535 г.. Позднее Тарталья сообщил свой способ Джироламо Кардано (24.9.1501–21.9.1576), и Кардано (тот самый, что изобрел карданов подвес) опубликовал его без указания имени автора; решение же, которое сейчас носит имя формулы Кардано, таково:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} \mp \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}$$

При этом Кардано записывал решение формулой:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{x.v.ci}.\sqrt{x}.108\tilde{p}10|\tilde{m}\sqrt{x.v.ci}.\sqrt{x}.108\tilde{m}10.$$

Кардано же впервые ввел в рассмотрение мнимые величины.

Первыми числами, известными человеку, были натуральные числа, т.е. числа, получающиеся в процессе счета. Научившись складывать (эта операция не выводит за пределы натуральных чисел), человек ввел обратную сложению операцию – вычитание. И здесь оказалось, что натуральных чисел не хватает: из 3 нельзя вычесть 5, и надо вводить новые, отрицательные числа, которые вместе с положительными образуют множество целых чисел. Следующая операция – умножение – тоже не выводит нас за пределы целых чисел, но при делении 3 на 5 целого числа не получается, – и понадобились рациональные числа, т.е. числа вида m/n , $n \neq 0$. Объединив эти числа с целыми, человек получил множество рациональных чисел. Затем – операция возведения в степень. Целая степень рационального числа – рациональна, а вот обратная операция – извлечение корня может дать и иррациональное число. Пришлось вводить иррациональные числа; иррациональные числа содержат числа алгебраические и трансцендентные; это – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Вернемся к извлечению корня. Извлечь квадратный корень из -1 не удастся, и приходится ввести такое «мнимое», т.е. «воображаемое» число i , что $i^2 = -1$. Комбинации действительных и мнимых чисел $((a+ib), a, b \in \mathbb{R})$ составляют вместе комплексные числа.

Кардано, введя в рассмотрение $\sqrt{-1}$, называл его «чисто отрицательным» числом и умел, например, показывать, что $(5+\sqrt{-15}) \cdot (5-\sqrt{-15}) = 40$.

Вслед за Кардано мнимыми числами заинтересовался Рафаэль

Бомбелли (ок.1526–1573), который понял, что кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один корень действительный, а другие два корня могут быть оба комплексные или оба действительные. Бомбелли вывел правила арифметических операций с мнимыми числами и научился преобразовывать достаточно сложные содержащие их выражения, например, $\sqrt[3]{3+i\sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{3-i\sqrt{10}} = \sqrt[3]{19}$. Бомбелли показал, как надо записывать все корни кубического уравнения.

Михаил Штифель (1468–1567) был коссистом и ввел свои обозначения для степеней неизвестного числа. Рассматривая геометрическую прогрессию $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$, Штифель пришел к идее многомерного обобщения куба: линия – это след точки, квадрат – след линии, куб – след квадрата, а если протолкнуть куб в 4-е измерение, то получится четырехмерный куб... Иллюстрировал он это на биномах: квадратные биномы разлагаются на 4 части, квадрато-квадратные – на 8, а сверхтелесные – на 32 части.

Штифель выписал биномиальные коэффициенты для разложения $(a+b)^n$ для $n=2, 3, \dots, 9$, причем сделал это очень наглядно, возведя 10001 в степени:

1000900360084012601260084003600090001
 100080028005600700056002800080001
 10007002100350035002100070001
 10006001500200015000600001
 100050010001000050001
 10004000600040001
 1000300030001
 100020001
 10001

Кроме того, он сформулировал правила нахождения биномиальных коэффициентов до 17-й степени.

К этому времени практически вся Европа перешла на позиционную систему счисления, однако ряд ученых, опираясь на труды арабских математиков и астрономов, стремился ввести в обиход шестидесятеричную систему. Полная победа десятичной системы произошла благодаря работе «Десятая» Симона Стевина (1548–1620). Стевин надписывал над строчкой десятичных знаков символы, обозначающие их разряд. Кроме того, он ввел знаки для степеней разных переменных, входивших в уравнение, сформулировал условия существования корней уравнения на заданном интервале и создал способ приближенного решения уравнений; Стевин ввел в рассмотрение отрицательные корни

уравнений. Стевин также участвовал в создании новой символики для обозначения дробных степеней.

Однако коренные изменения в алгебраическую символику ввел Франсуа Виет (1540–1603), юрист по образованию и математик-любитель. Он вводит обозначения степеней по их латинским названиям (A – это x): $x^3+3B^2x=2z^3$ он записывает так: *A cubus +B plano 3 in A æquari Z solido 2*.

Слово *æquari* (равно) позднее стало записываться $\approx$, и позднее эти буквы превратились в ∞ , а затем в обычный знак равенства «=».

Виет, исследуя вопрос о трисекции угла и связанное с ним кубическое уравнение, установил, что любое кубическое уравнение может решаться методом вставки, введенном в использование еще древними греками. Он знал разложения $\sin mx$ и $\cos mx$, и поэтому легко решил предложенное Адрианом ван Роуеном (1561–1615) уравнение

$$45x-3795x^3+95634x^5-\dots-13200x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=$$

$$=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{5/6}-\sqrt{1\frac{7}{8}-45/64}},$$

заметив, что правая часть – это сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, и x – хорда $1/45$ дуги в 24° . Затем он нашел еще 22 решения, используя выражение для $2 \sin((n \times 360^\circ + 12^\circ)/45)$.

Виет разработал общую теорию решения алгебраических уравнений, и, пользуясь своей символикой, мог производить над ними достаточно сложные преобразования. Кроме того, он разработал методы приближенного решения уравнений.

Кроме алгебраических уравнений, европейские математики занимались тригонометрией (Николай Кузанский (1401–1464), Иоганн Мюллер (Региомонтан, 1436–1476)), астрономией (Николай Коперник, 1473–1543), теорией перспективы (Пьетро делла Франческа (1416–1492), Леонардо да Винчи (1452–1513), Альбрехт Дюрер (1471–1528)).

К концу эпохи возрождения математики уже умели оперировать с отрицательными и мнимыми величинами, имели развитую алгебраическую символику (которая полностью была разработана только к началу XIX века), исследовали ускоренное движение, имели большой запас знаний по тригонометрии, проективной геометрии и приближенным вычислениям. Все было готово к тому, чтобы математика совершила новый этап в своем развитии.

И подготовил этот этап Рене Декарт (31.3.1596–11.2.1650), когда он изобрел декартову прямоугольную систему координат и научился записывать и исследовать функции; многие геометрические задачи теперь могли быть решены алгебраически, с помощью записи данных в

системе координат. Математика перестала быть статичной: функции и переменные величины, которые ими описывались, стали основой развития новой математики – математики переменных величин, аппарат которой позволял решать многие ранее неразрешимые задачи. Математика научилась сама ставить перед собой новые проблемы – обобщения старых проблем; она несколько оторвалась от практики, но и тогда, и до сих пор в связи с бурным развитием земной цивилизации возникают все новые и новые задачи, которые решает математика, причем часто постановка новой задачи влечет за собой создание нового, принципиально отличного от ранее известных, математического аппарата.

Что было дальше. Конец XVII – начало XVIII века были ознаменованы работой двух выдающихся ученых – теолога и математика Исаака Ньютона (4.1.1643–31.3.1727) и юриста и математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1.7.1646–14.11.1716). Вероятно, в истории науки не было двух столь разных личностей – и по темпераменту, и по судьбе – чем эти два великих математика.

Исаак Ньютон за всю свою жизнь ни разу не удалился от своего родового имения Вултсторпа более чем на 100 км. Лейбниц объездил всю Европу; Петр I приглашал его организовывать в России Академию Наук. Все замыслы Ньютона осуществлялись: он долгие годы профессорствовал в Тринити-колледже, был членом Королевского Общества (Английской Академии), руководил монетным двором и удачно реформировал его работу, издавал свои труды. Лейбниц, работая секретарем и посланником герцога Бойнебургского, часто оставался без средств к существованию, научные журналы, куда он подавал свои работы, закрывались, срывались его попытки быть избранным во французскую Академию, стать профессором; после того, как исследования Лейбница по генеалогии стали основанием для коронации короля Англии, он также не получил соответствующего вознаграждения.

Время, в которое жили эти замечательные ученые, было временем открытий во всех сферах человеческой деятельности. Так, например, секретарь Королевского Общества Роберт Гук (1635–1702) обязан был еженедельно представлять на заседании Общества новое открытие или изобретение; он состоял в активной переписке со всей научной Европой.

Исаак Ньютон в 1661 г. поступил в Тринити-колледж при Кембриджском университете; на вступительном экзамене по математике он решал задачи, пользуясь разработанным Декартом методом координат, чем поразил присутствовавшего здесь Исаака Барроу (Ньютон не изучал «Начал» Евклида, как это было принято тогда в образовании

джентльменов). Лишь в колледже он прочитал «Начала». Главной своей задачей теолог Ньютон считал установление тех принципов, по которым Всевышний создал мир. Отсюда его интерес к движению небесных тел, оптике, Священному писанию. А для этого необходимо было узнать математические законы, которым подчинялась Вселенная и всё в ней. В 1665 г. Ньютон формулирует в общем виде правило возведения в степень двучлена (бинома). Тогда же университет закрывается из-за эпидемии чумы, и Ньютон уезжает в свое поместье, где занимается небесной механикой и открывает закон всемирного тяготения. По возвращении в Тринити-колледж он издает «*De Analysi per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas*» (анализ бесконечных рядов), «*De methodis serierum et fluxionum*» (метод рядов и флюксий – книга об использовании бесконечно-малых в исследовании поведения функций). Он исследует восприятие человеком света (экспериментируя на себе, он чуть не потерял зрение), издает об этом «*Оптику*» и «*Лекции по оптике*». Кроме того, его «*Универсальная арифметика*» становится одним из первых учебников Нового времени по арифметике, алгебре и применению алгебры к геометрическим задачам; правда, его обозначения были не очень удачны – например, степени неизвестных он обозначал как z , zz , zzz и т.п.. Он продолжает изучение небесной механики, и в 1684 издает «*De Motu Corporum*», а в 1687 – «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*», в которой излагает небесную механику, используя латинский термин *gravitas* (вес) для обозначения сил притяжения между небесными телами. Кроме того, он издает ряд трудов по библейской хронологии и теософии.

Родившийся в Лейпциге Готфрид Вильгельм Лейбниц получил гуманитарное образование, он учился в Лейпцигском университете с 14 лет. Он защитил две диссертации по философии и обладал большим кругом научных интересов. Так, он был секретарем Нюрнбергского алхимического общества, интересовался работами Кристофера Врена (1632–1723), Христиана Гюйгенса (1629–1695), Иоганна Кеплера (27.12.1571–15.11.1630), переписывался с секретарем Королевского Общества герцогом Ольденбургским. В 1672 г. по поручению своего патрона он прибывает в Париж с тем, чтобы направить завоевательные амбиции Людовика XIV от Германии в сторону Африки (это ему не удалось – лишь много позднее другой математик Жан Батист Жозеф Фурье подтолкнул Наполеона к вторжению в Египет). Лейбниц в Париже пытается создать вечный двигатель, но обнаруживает свое слабое знание математики и начинает учиться. Он консультируется с французскими учеными, королевским библиотекарем Каркави и начинает

собственные исследования. Он находит дифференциалы степенных функций, исследует ряды и обнаруживает, что если в ряде $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$ знаки слагаемых чередуются, а абсолютные величины слагаемых монотонно стремятся к 0, то этот ряд сходится (т.е. существует предел частичных сумм $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots \pm a_n$). Этот результат не был по достоинству оценен его современниками – они не поняли, что теорема, доказанная Лейбницем, носит *общий характер*. Лейбниц посещает ненадолго и Лондон, но, по-видимому, Ньютона он там не встретил, хотя и переписывался с ним. В Лондоне он знакомится с только что исследованным методом определения касательной к заданной параметрически кривой (фактически, теоремой Коши: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы на $[a; b]$ и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то $\exists \xi \in [a; b]: \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$). В дальнейшем Лейбниц живет в разных

городах Европы, занимаясь самыми разными проектами, но не бросает занятия математикой и обнаруживает некоторые свои результаты. Так, в 1686 г. он издает статью «*Acta Eruditorum*», где вводит знак интеграла в виде стилизованной буквы $S - \int$. Также он придумал привычное для нас обозначение дифференциала и производной.

Исследования в области анализа бесконечно-малых Ньютон и Лейбниц вели параллельно, каждый своим путем, при этом они были знакомы с идеями друг друга. Они сконцентрировали научную математическую мысль своего времени в компактных понятиях и обозначениях. Потом были работы Бернулли, Эйлера, Гаусса, Коши, Вейерштрасса и многих других выдающихся ученых, но развитие их идей без фундамента, заложенного Ньютоном и Лейбницем, могло пойти другим путем.

История математики в России. Трудно сказать, каковы были математические познания древних народов, населявших территорию России: письменных источников не сохранилось, а грандиозных сооружений, подобных египетским пирамидам или вавилонским зиккуратам, на нашей территории нет. Хотя, конечно, международные связи древних славян со многими народами Европы и Азии не могли не познакомить наших предков с иноземными научными достижениями.

Первые известные нам письменные славянские источники относятся к X–XI вв., но по ним сложно судить об их культуре и международных связях (хотя арабские писатели IX в. сообщают о русских купцах, да и археологи нашли на территории России многочисленные иноземные монеты и предметы обихода).

Однако существование и постройка городов, ведение земледелия и

торговли говорят о распространенности элементарных математических знаний на древней Руси. Об этом говорят и берестяные грамоты, и великолепные храмовые и дворцовые комплексы – как деревянные, так и каменные. Конечно, это были не систематически изучаемые математические теории, а, скорее всего, свод эмпирических правил в конструировании и строительстве, навыки арифметических действий (возможно, с использованием простых дробей: в торговых расчетах использовали слитки драгоценных металлов, которые в случае необходимости делили на нужное число долей, – отсюда слово «рубль»). В XV веке уже пользовались единицей измерения земли – «сохой»; соха – земля, которую можно вспахать за световой день одной сохой = 800 четвертей земли; четверть = 1/2 десятины. В ходу были дробные части этой меры: пол-сохи, треть сохи, четь-сохи (пол-пол-сохи), пол-пол-пол-треть сохи и т.д.

Как и все древние народы, наши предки пользовались и циркулем, и линейкой: этому есть материальные свидетельства. Сохранились предназначенные для геометрических расчетов чертежи-«вавилонны», напоминающие вид сверху на трехступенчатый зиккурат. Это были три концентрических подобных прямоугольника с заданным отношением сторон $1: \sqrt{2}$. Проведенные на чертеже дополнительные линии позволяли достаточно точно строить квадратуру круга, удваивать, утраивать и т.д. квадраты, строить простые иррациональные выражения. По-видимому, древнерусские зодчие не пользовались предварительно составленными чертежами, а проводили геометрические построения и расчеты прямо в ходе строительства.

Возможно, много больше об этом могли бы рассказать древнерусские рукописи, но значительная их часть либо не сохранилась вовсе, либо дошла до нас в неполном виде, – виной тому и небрежность в их хранении, и войны.

Кирик Новгородец. Самое знаменитое древнерусское сочинение «Кирика Диакона и доместика Новгородского Антониева монастыря учение им-же ведати человеку числа всех лет» написано в 1136 г. и посвящено, как видно из названия, арифметико-хронологическим расчетам. Счет годам велся не от рождества Христова, а от сотворения мира; видимо, Кирик умел и вычислять дни Пасхи (каждый год они меняются и позднее, когда в 1492 г., к 7000-летию сотворения мира, окончилось действие таблиц, полученных из Византии, вычисление Пасхалий стало важной церковно-государственной проблемой). Кирик вычислил число месяцев от сотворения мира к тому времени (79728), а затем число недель и число дней. Кроме того, Кирик привел пример геомет-

рической прогрессии – что получится, если день поделить на часы, а часы – на дробные часы и т.д., т.е. рассматривал дроби с числителем 1 и знаменателями 12, 60, 300, 1500, 7500, 37500, 187500, 937500; – окончив этим знаменателем, Кирик заявил: «более сего не бывает...».

Последние исследования показывают, что Кирик был не одинок в своем интересе к искусству обращения с числами: он имел обширную переписку, да и в вопросах денежного обращения (полновесности монет) и церковного образования люди, подобные Кирику, были не одиноки.

Вообще, влияние на русскую культуру византийской было наиболее сильным: после крещения на Руси появились не только книги религиозно-научного содержания, но и церковно-светского и светского характера греческого и болгарского происхождения. Переводились на русский язык философские сочинения, создавались и русские по образцу эллинистических. В переведенном на русский язык сочинении Иоанна Экзарха (X в.) излагается астрономия на основании вычислений Эратосфена с оценками размеров небесных тел. Однако, поддерживая традиционные тесные отношения с Византией, молодое русское государство развивало разнообразные, в том числе и научные, связи со странами западной Европы. Например, в 1493 г. в Ростокском университете (Германия) появились два первых русских студента, а несколько позже Борис Годунов направил учиться в Германию группу молодых дворян.

Математические расчеты в русских рукописях присутствовали в сочинениях юридического и хозяйственного характера (в том числе в «Русской правде» – в части денежных расчетов по долгам и в виде штрафов).

Несмотря на известное количество грамотных и умеющих считать людей, общая образованность народа была крайне низкой: доходило до того, что в XV в. в дьячки и даже священники назначались неграмотные (а в это время в Москве уже появились первые башенные механические часы!).

Развитие математики в России реально начинается только с XVII века, хотя имеются основания полагать, что при Иване Грозном в 1556 г. был издан наказ о землемерии с приложением землемерных начертаний, основанных на геометрических знаниях (скорее всего, в виде примеров и правил). Тогда же создан древнейший русский учебник по математике: «Сия книга рекома по гречески Арифметика, а по Немецки Алгоризма а по Русски Цыфирная счетная мудрость».

В XVII в. появляется ряд не только арифметических и геометрических сборников, но и общеобразовательные книги, в том числе две эн-

циклопедии – «Азбуковники». В начале XVII в. создан «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки», снабженный небольшим сводом применения геометрических методов в геодезии – для определения расстояний на местности, К 1629 г. относится «Книга сошного письма» («О земном верстании, как земля верстать») – как следует из названия, предназначенная землемерам. Изложенные в ней геометрические методы не всегда правильны и не всегда предлагают простейший путь решения задач; специалисты полагают, что это – переработка более раннего сочинения.

В древнерусских арифметических рукописях изложены правила сложения, умножения и вычитания (столбиком) и деления (уголком) и другим способом, когда частное помещалось между делимым и делителем и отделялось от них горизонтальными чертами, даются примеры задач на применения теоремы Пифагора; часто упоминается эллинское происхождение математических наук. Даются правила операций над дробями, при этом упоминается (несмотря на узко практическую направленность рукописей!) коммутативность умножения.

Многие задачи посвящены торговым расчетам, в том числе расчету прибыли в случае совместного участия в деле нескольких человек с разными денежными вкладами. Много задач было развлекательного характера: по большей части они заимствованы из сочинения француза Баше де Мезириака (1557–1638), посвященного математическим развлечениям.

Вот примеры таких задач:

О плотниках. Четыре плотника у некоего гостя нанялись двора ставить. И говорит первый плотник так: «Только б де мне одному тот двор ставить, я бы де его поставил един годом». А другой молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и я бы де его поставил в два года». А третий молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и я бы де его поставил в три года». А четвертый так рек: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и ябы де его поставил в четыре года»: Ино все те четыре плотника учили тот двор ставить вместе. Ино сколь долго они ставили, сочти мне.

О льве, волке и лисе. Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хочешь ведати, сколько бы они все три – лев и волк и пес – овцу съели вместе вдруг и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми.

О яйцах. Пришел христианин в торг и принес лукошко яиц. И торговцы его спрашивали: «Много ли у тебя в том лукошке яиц?» И христианин молвил им так: «Яз, господине, всего не помню на перечень, сколько в том лукошке яиц. Только яз помню: перекладывал яз те яйца из лукошка по два яйца, ино

одно яйцо лишнее осталось на земли; и яз клал в лукошко по 3 яйца, ино одно же яйцо осталось; и яз клал по 4 яйца, ино одно же яйцо осталось; и яз их клал по 6 яиц, ино одно же яйцо остался; и яз клал по 7 яиц, ино все по сему пришло. Ино сколько в том лукошке яиц было, сочти ми».

В русских математических рукописях также приводились примеры применения правила ложного положения.

Особенностью русских математических рукописей была склонность к примерам с большими числами и сложными вычислениями.

Счетные приспособления. Одним из способов облегчения вычислений был счет костями или пенязи – счет на расчерченных на столе мелом колонках по числу разрядов целых чисел, над которыми проводили операции (археологи часто находят древнерусские кошель с вишневыми и сливовыми косточками). Кроме того, применялся счет на досках – предшественниках русских счетов. Счет костями применялся для всех четырех арифметических действий с целыми числами. На досках же умели работать и с дробями, для этого на них выделяли добавочные подразделения для откладывания трети, полутрети, половинополутрети, малой трети ($1/24$), чети, получети, половинополучети и малой чети ($1/32$).

Для облегчения арифметических расчетов также широко употреблялись таблицы сложения и умножения (в 1682 г., например, в Москве была издана брошюра – таблица умножения чисел от 1 до 100).

Математическое образование. Никакой систематической системы образования в России до XVII в. не было. Недолго просуществовавшая при царе Алексее Михайловиче Типографская школа (основанная и действовавшая при содействии Византии) практически не оказала влияния на общую грамотность населения. Только в начале XVII в. была основана Киевская духовная академия (при самом активном участии иезуитов), а в 1687 г. – Славяно-греко-латинская академия в Москве, воспитанник которой Л.Ф.Магницкий (1669–1739) составил известный учебник «Арифметика».

Арифметика Магницкого содержала не только чисто арифметические сведения, но и значительный объем алгебры, геометрии, тригонометрии, метеорологии, астрономии и навигации. Материал излагался, начиная с простого примера, затем следовало правило, и за ним – большое количество задач, преимущественно практического содержания (Магницкий понимал, что большинство учащихся будут пользоваться своими знаниями не в теоретических исследованиях, а на практике). Раздел, посвященный арифметическим и геометрическим прогрессиям, а также учение о квадратных и кубических корнях включены

были в арифметический раздел по той причине, что не каждый ученик сможет освоить алгебру, а перечисленные выше сведения важны в практических приложениях.

Однако в упомянутых учебных заведениях математика либо не преподавалась вовсе (Москва), либо преподавались лишь ее основы (Киев). Придя к власти, Петр I обнаружил полную безграмотность не только простых людей, но и купцов и ремесленников. Отсутствие в России учебных заведений должного уровня вынудило Петра посылать за границу на учебу специалистов практически всех областей промышленности, но не всегда такие поездки приводили к хорошим результатам. Петр предпринял попытку печатать для России учебные пособия (в том числе и по математике) за границей, но эта затея прогорела: в России не нашлось достаточного количества покупателей. Петр решает организовать в России широкую сеть общеобразовательных и специальных школ и училищ.

Навигацкая школа. В 1701 г. в Москве в Сухаревой башне начала работу «математических и навигацких, т.е. мореходно-хитростных наук» школа под руководством английского профессора Фарварсона. Фарварсон ввел в учебную программу арифметику, алгебру, геометрию, плоскую и сферическую тригонометрию; он сам писал учебники и перевел на русский язык переработанные во Франции «Начала» Евклида. В 1715 г. на базе Навигацкой школы создана в Петербурге Морская академия.

Цифирные школы. В 1715 г. Петр распорядился послать по два ученика Навигацкой школы в губернии «для науки молодых ребяток из всяких чинов людей» – были образованы цифирные школы. Учеников туда набирали с трудом: мало кто хотел пускать детей «в науку»; всеми правдами и неправдами принятые ученики стремились покинуть школы (несмотря на то, что за неявку в школу сажали в тюрьму). Из набранных в 1716–1722 гг. 2000 человек в школах осталось около 500, а прочие:

1. Выбыли посадские и духовные ... 572
2. Бежали, отпущены в дома и не явились ... 322
3. Выучено и отпущено ... 302
4. Безграмотных, неспособных и идиотов ... 233
5. Взятые в разные должности ... 93

К 1744 г. из 42 цифирных школ осталось 8. Три самые большие из них слили с гарнизонными школами, а прочие распустили.

Гарнизонные школы были учреждены в 1737 г. при полках, офицеры и унтер-офицеры преподавали там среди прочего арифметику, ар-

тиллерию и инженерство; элементарная грамотность распространилась в России именно благодаря этим школам.

Другие открытия при Петре школы были по преимуществу военные и не сыграли существенной роли в развитии широкого преподавания математики в России.

Академия наук. В начале XVIII века некий Орфиреус в Германии «изобрел» вечный двигатель; Петр захотел его приобрести, но лишь после проверки построенного механизма учеными; изобретатель же требовал 100000 ефимков (талеров) за механизм без предварительных испытаний. По этому поводу Петр вел переписку с рядом зарубежных ученых. Примерно в то же время Петра избрали в Парижскую академию наук, и история с вечным двигателем, а также недавняя идея Г.Ф.Лейбница о создании в России академии наук привели к тому, что 24 января 1724 г. был издан Указ об организации Академии наук, а при ней – университета и гимназии. Но в России кандидатов на должности профессоров не было, – пришлось выписать их с Запада (и, надо сказать, весьма удачно: среди первых профессоров были сыновья Иоганна Бернулли (27.7.1667–1.1.1748) – Николай (6.2.1695–31.7.1726) и Даниил (8.2.1700–17.3.1782), Христиан Гольдбах (18.3.1690–20.11.1764), а позднее – с 1727 г. – и величайший математик всех времен Леонард Эйлер (15.4.1707–18.9.1783)).

Сразу же стал печататься первый русский научный журнал «Комментарии Санкт-Петербургской Академии», в первом же томе появился ряд математических статей, а со второго номера в нем практически во всех номерах печатались работы Л.Эйлера вплоть до его смерти.

Однако в университете при Академии должны были быть и студенты (их в России на французский манер называли «елевами»), – пришлось выписать с Запада и 8 слушателей. Но профессоров было 17, – и поэтому профессорам пришлось посещать лекции коллег. Для гимназии же нашлись отечественные ученики – их вербовали из детей солдат, крепостных, мастеровых (дворяне учиться не хотели). Но выпускники гимназии не были достаточно подготовлены для учебы в университете – и пришлось учредить стипендии, а стипендиатов затребовать из Славяно-греко-латинской академии (среди них и М.В.Ломоносова). И впоследствии приходилось набирать академических студентов принудительно. Когда в 1783 г. оказалось, что на трех факультетах – философском, юридическом и медицинском – было только 2 студента, президент Сиянс-Академии (*science* – наука (фр.)) княгиня Дашкова закрыла университет.

Но организованный в 1755 г. Московский университет работал со

дня своего основания без перерывов. Для трех факультетов (философского, юридического и медицинского) готовили студентов две гимназии (для разночинцев и дворян), однако и здесь бывали случаи, когда на факультете не хватало студентов.

Математика сначала преподавалась достаточно слабо: только в 1760 г. была образована кафедра математики, математика преподавалась в объеме, меньшем современного школьного курса. И лишь в начале XIX в. в университетской программе начали появляться более сложные курсы.

В это же время в России учреждаются университеты во многих губерниях. В начале царствования Александра I проводится ряд реформ, связанных с именем Сперанского. В результате этих реформ, в частности, получение университетского образования автоматически давало обер-офицерский чин. С 1808 г. никто не мог поступать на государственную службу без диплома казенного или частного училища. Преподаватели для таких училищ готовились в университетах; в уставах ряда университетов к трем ранее имевшимся факультетам добавлялся физико-математический.

С этого времени в российских университетах преподавание математики постоянно совершенствовалось, достигнув к настоящему времени чрезвычайно высокого, ценимого во всем мире, уровня.

Университеты в России были и сейчас являются не только крупными образовательными учреждениями, но и научными центрами. Во многих университетах работали и работают выдающиеся математики.

Математики и математические школы России.

Леонард Эйлер. Эйлер родился в 1707 г. в г.Базеле (Швейцария). Учился у Иоганна Бернулли, изучил все новейшие достижения математиков того времени, также он изучал физику и медицину. Эйлер дружил с сыновьями своего учителя – Николаем и Даниилом, которые в 1725 г. уехали работать в Петербург. Эйлер пытался занять место профессора кафедры физики в Базеле, но это ему не удалось – и по приглашению друзей он едет в Петербург на кафедру физиологии, куда прибыл в день смерти Екатерины I. Смерть императрицы повлекла за собой полнейший упадок Академии – несвоевременно отпускались денежные средства, руководили Академией случайные люди, многие академики уехали обратно в Европу. Освободилось место на кафедре физики, которое Эйлер занял в 1729 г., а с 1730 г. он занимал кафедру математики; с 1735 г. он занимался также работой с географическими картами. В 1736 г. Эйлер лишился одного глаза, когда перенапряг его, выполняя срочное задание правительства за три дня, в то время как

другие академики просили на эту работу несколько месяцев. В 1740 г. в связи с ухудшением здоровья Эйлер подает в отставку и в 1741 г. уезжает в Берлинскую Академию (сам Эйлер связывал свой поступок с кончиной императрицы Анны, покровительствовавшей Академии). Работая в Берлине, Эйлер не прерывал связей с Россией: за это время он опубликовал в «Комментариях С.П.Б. Академии» примерно столько же работ, что и в Берлине. В 1766 г. Эйлер возвращается в Россию – уже навсегда. Вскоре он совсем потерял зрение, но Эйлер продолжал работать, диктуя свои сочинения сыну и ученикам. За несколько дней до смерти Эйлер занимался расчетом полета аэростатов, что требовало очень тонких математических методов.

Область научных интересов Леонарда Эйлера охватывала практически все области современной ему математики. Описать все его результаты на нескольких страницах без знания всего арсенала современной высшей математики невозможно. Остановимся лишь на некоторых.

Эйлера интересовало все то новое, что вносила в жизнь развивающаяся индустрия Европы и Нового Света. В частности, его интересовали проблемы, связанные с развитием транспортного сообщения: мореплавание ставило проблему улучшения методов ориентировки в открытом море, улучшения остойчивости судов при качке и боковом ветре и повышение их быстроходности. С этим были связаны и задачи математического описания морского приливного движения, для чего необходимо было изучить аномалии в поведении Луны. На основании «Теории движения Луны» были составлены лунные таблицы, за что в 1765 г. английский парламент присудил Эйлеру учрежденную еще в 1715 г. премию в 300 фунтов.

Усовершенствование артиллерии потребовало установления новых принципов стрельбы, и, в частности, необходимо было описать закон движения снаряда на большой скорости в сопротивляющейся среде (воздухе). Этими исследованиями занимался Николай Бернулли и Бенджамин Робинс (1707–1751); Эйлер перевел и усовершенствовал этот трактат, фактически создав новую науку (по этой книге затем учились артиллеристы).

Развитие мореплавания и вопросы ориентировки предъявляли новые требования к оптическим инструментам. Создаются различные теории света Исааком Ньютоном (4.1.1643–31.3.1727) и Христианом Гюйгенсом (16.4.1629–8.7.1695). Эйлер, сторонник теории Гюйгенса, также исследует законы оптики (он написал более 60 работ на эту тему). Он определил, как следует изготавливать ахроматические стекла, за

счет чего можно было заменять громоздкие зеркальные рефлекторы компактными рефракторами. Кроме того, он нашел способ уменьшить оптические инструменты без изменения их оптических свойств.

Огромный вклад сделал Эйлер в развитие математического анализа – раздела высшей математики, на который сейчас опираются практически все математические теории.

Законы движения тел можно выражать с помощью уравнений, которые связывают между собой положение тела ($f(t)$), его скорость ($f'(t)$), а также, возможно, ускорение (скорость изменения скорости – $f''(t)$), и, возможно, скорость изменения ускорения ($f'''(t)$), и т.д.. Такие уравнения называются дифференциальными, и чем больше входит в него характеристик движения кроме координаты тела (функции) и его скорости (производной) – производные высших порядков, тем сложнее его решать. Эйлер дал много остроумных и удобных методов решения дифференциальных уравнений.

Еще более сложная задача – это задача об исследовании вращения твердого тела, когда со временем меняется не одна координата, а несколько, при этом скорости изменения координат зависят не только от времени, но и от состояния других координат. Описываются такие задачи еще более сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений. Эйлер успешно исследовал один из случаев вращения твердого тела и указал способы решения возникающих при этом уравнений.

Дифференциальные уравнения сложны тем, что для каждого нового типа уравнений приходится изобретать специальный метод решения (понятно, что решение дифференциального уравнения включает в себя интегрирование, а, как мы знаем, для разных типов функций есть разные способы отыскания первообразной, то же самое происходит и с дифференциальными уравнениями). Эйлер придумал ряд методов решения нескольких типов уравнений. Для случая, когда решение невозможно выразить через привычные для нас элементарные функции, Эйлер предложил несложный способ их приближенного решения.

Решал Эйлер и задачи вариационного исчисления, т.е. задачи, в которых неизвестно не число, а целая функция, и решением задачи является та функция, некая числовая характеристика которой максимальна или минимальна при определенных условиях. Например, требуется, чтобы под графиком функции оказалась максимально возможная площадь при условии, что длина кривой, которая изображает график функции, равна некоторому фиксированному числу и, кроме того, этот график проходит через определенные точки. Или, например, требуется

найти кривую, соединяющую две данные точки, катясь с которой, шарик быстрее всего спустится из верхней точки в нижнюю; такая кривая называется брахистохрона.

Легенда. Говорят, что впервые задачу вариационного исчисления решила древняя царица Дидона или Додо. Бежав из родного царства, она оказалась на африканском берегу и попросила у местных жителей разрешения занять столько земли на берегу, сколько она сможет огородить бычьей шкурой. Наивные туземцы согласились. А хитрая Дидона всю ночь кромсала шкуру своими маникюрными ножницами, и, разрезав ее на тончайшие полоски, огородила территорию, на которой в дальнейшем вырос город Карфаген. Как говорят математики, Дидона решала изопериметрическую задачу, т.е. задачу о нахождении кривой данной длины, ограничивающей наибольшую площадь при условии выполнения некоторых условий. В древней Греции математики исследовали, например, вопрос о виде многоугольника с данным периметром, который имел бы наибольшую площадь.

Значительных результатов Эйлер достиг в теории чисел. Исследуя простые числа, Эйлер предложил ряд несложных формул, при подстановке в которые большого числа первых целых чисел получаются простые. Так, многочлены $2x^2+29$; x^2+x+41 ; $x^2-79x+1001$ дают соответственно 29, 41, 80 простых чисел при подстановке вместо x 0; 1; 2;...

Эйлер доказал также, что любой многочлен с целыми коэффициентами при подстановке чисел 0; 1; 2;... рано или поздно даст составное число.

Еще один интересный результат Эйлера:

$$\text{При } s > 1 \quad (1-1/2^s)(1-1/3^s)(1-1/5^s)(1-1/7^s)(1-1/11^s) \cdot \dots = \\ = 1/(1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+\dots)$$

(знаменатели дробей, стоящих в бесконечном произведении – все простые числа).

Интересно, что многие свои результаты Эйлер «угадывал»: его научная интуиция была безупречна. Изложенные им факты, подкрепленные не детальным доказательством, а соображениями, почему это так, а не иначе, в дальнейшем полностью подтверждались выполненными его последователями полными доказательствами.

Николай Иванович Лобачевский (1792 или 1793–24.2.1856) долгое время был не только профессором, но и ректором Казанского университета. Круг его научных интересов был очень широк, но всемирную славу получила геометрия Лобачевского.

До Лобачевского геометрия мыслилась только как геометрия Евклида, но многих математиков интересовал вопрос: а так ли необхо-

дим в геометрии пятый постулат Евклида, согласно которому через точку можно провести ровно одну прямую, параллельную данной. Многие ученые пытались доказать этот постулат, исходя из других аксиом и постулатов Евклидовой геометрии.

Н.И.Лобачевский предположил, что пятый постулат Евклида не имеет связи с другими положениями евклидовой геометрии, и может быть заменен другим положением, в результате чего получится столь же стройная и непротиворечивая теория, как и евклидова геометрия.

Составить отрицание пятого постулата можно двумя способами.

Можно постулировать, что через точку, не лежащую на прямой, невозможно провести ни одной прямой, параллельной данной. Такая геометрия реализуется на сфере: роль прямых (т.е. кратчайших путей между точками) здесь играют окружности – пересечения сферы с проходящий через ее центр плоскостью. В этой геометрии у всех треугольников сумма углов больше 180° .

Лобачевский решил принять другое отрицание пятого постулата: через каждую точку вне прямой можно провести, по крайней мере, две прямые, параллельные данной; оказалось, что эта геометрия тоже не противоречива (позднее обнаружили поверхность, на которой она реализуется – сферу Лобачевского). В этой геометрии у всех треугольников сумма углов меньше 180° .

Публикацию работ Лобачевского встретила среди соотечественников крайне негативную реакцию: Лобачевского даже называли сумасшедшим. Публикации в западных научных журналах многими математиками были восприняты как розыгрыш кого-то из именитых ученых. И лишь после благожелательного отзыва К.Ф.Гаусса (30.4.1777–23.2.1855) теорией Лобачевского заинтересовались. К тому времени подобную теорию создал венгр Януш Бойаи (15.12.1775–20.11.1856). Но Лобачевский не дождался признания своей теории, он умер тяжелой болезнью слепым одиноким стариком, незадолго до этого потеряв сына.

Кроме геометрических работ Лобачевский оставил после себя публикации по математическому анализу, алгебре, теории вероятностей, механике, физике и астрономии.

Петербургская математическая школа. К концу XIX века в Петербурге сложилось мощное математическое сообщество, которое принято сейчас называть Петербургской математической школой. Эта школа воспитала много выдающихся математиков, занимавшихся, в основном, теорией чисел, математической физикой и теорией вероятностей.

Представителем Петербургской школы был Виктор Яковлевич Буняковский (16.12.1804–12.12.1889). Буняковский почти все свои интересы связывал с теорией вероятностей и приложениям ее к статистике народонаселения; он – творец русской демографии. Математические проблемы теории вероятностей тесно переплетаются с проблемами математического анализа, и Буняковский достиг в нем значительных успехов: он обобщает неравенство Коши

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) \times (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

таким образом:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Это неравенство применяется для доказательства важнейших фактов во многих областях математики.

Математической физике посвятил себя воспитанник Петербургской математической школы Михаил Васильевич Остроградский (24.9.1801–1.1.1862), прошедший значительную часть своей жизни на Украине. Чисто математическими методами он независимо от В.Гамильтона (4.8.1805–2.9.1865) установил важное положение механики – принцип наименьшего действия. Занимался он также и вариационным исчислением, и баллистикой, интересовался и другими областями математики.

М.В.Остроградский был замечательным педагогом и великолепным лектором: многие его ученики стали впоследствии видными учеными; его усилиями значительно повысился уровень преподавания математики в высших учебных заведениях России.

Проработавший практически всю свою творческую жизнь в Петербурге Пафнутий Львович Чебышёв (14.5.1821–26.11.1894) находился в истоке многих русских математических школ – теории вероятностей, теории чисел, теории приближения функций, теории механизмов.

В теории вероятностей Чебышёв вывел неравенство, благодаря которому стало возможно легко доказывать, что в серии одинаковых экспериментов средняя частота выпадения того или иного результата приближается к истинному значению вероятности этого результата.

Например, если много раз подбрасывать монету, то (исключив возможность падения монеты на ребро или зависания ее в воздухе) в среднем частота выпадения «орлов» (т.е. отношение числа выпавших «орлов» к общему числу экспериментов) будет близка к частоте выпадения «решек» – вероятности этих событий – $\frac{1}{2}$.

В теории механизмов важной задачей было перевести круговое или поступательное движение в движение рычага по наперед заданной

траектории (так коленчатый вал в автомашине превращает поступательное движение в круговое). Точность движения конца рычага по заданной траектории позволяет уменьшить износ деталей машины и уменьшить вероятность поломки. П.Л.Чебышёв с помощью специально разработанного им аппарата теории функций показал, что криволинейное движение можно перевести в прямолинейное с любой наперед заданной точностью.

Для этого он использовал построенные им наименее отклоняющиеся от нуля функции – т.е. такие многочлены заданной степени со старшим коэффициентом 1, которые на заданном отрезке оси абсцисс менее всего отклоняются от нуля.

П.Л.Чебышёвым было создано более 40 различных механизмов и около 80 их модификаций; он сконструировал знаменитую переступающую машину, имитирующую ходьбу животных.

Наименее отклоняющиеся от нуля многочлены послужили основой к созданию Чебышёвым новой теории – теории приближения функций. Функции, которые реально встречаются на практике, редко записываются красивыми формулами, а чаще всего их просто невозможно выразить через известные нам элементарные функции. В этом случае функцию можно заменить другой, очень близкой к изучаемой, но составленной из простых (например, многочленов) функций. Чебышёв показал, как из всех многочленов со степенью не выше заданной подобрать тот, который лучше всего приближает заданную функцию.

В области теории чисел Чебышёв исследовал отношение числа простых чисел, меньших N , к числу N , когда N стремится к бесконечности.

Учеником П.Л.Чебышёва был Андрей Андреевич Марков (14.6.1856–20.7.1922), основных своих результатов достигший в теории вероятностей (кроме того, он занимался теорией чисел, дифференциальными уравнениями и другими вопросами). Кроме занятий актуарной (страховой) математикой, которая оценивает шансы страхового общества не выплачивать страховой премии (например, за несчастный случай) и соответственно позволяет устанавливать наиболее выгодные и конкурентоспособные размеры страховых взносов, Марков заинтересовался задачами, в которых вероятность того или иного события зависела от условий, которые сложились случайным образом.

Например, с некоторой вероятностью студент может проспать, а может и не проспать. В обоих случаях он с некоторой вероятностью (но уже разной для каждого из случаев) он может опоздать или не опоздать на автобус, которых ходит 1 раз в час. Если он не опоздал на ав-

тобус, то с некоторой (довольно большой) вероятностью он не опоздает в институт. А если опоздал – то с некоторой вероятностью подойдет троллейбус, на котором тоже можно доехать до института, но с двумя пересадками. Можно добавить сюда еще, что автобус (или троллейбус) может по дороге сломаться с некоторой вероятностью. То есть вероятность конечного события – неопоздания в институт – должна вычисляться отдельно для всех цепочек случаев, которые могут произойти со студентом. Такого рода цепочки, в которых вероятности событий на каждом следующем этапе зависят от того, в каком состоянии оказался исследуемый процесс на предыдущем этапе, и называются цепями Маркова. Марков исследовал эти цепи и установил их основные характеристики.

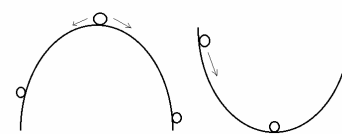
Кроме таких вероятностных цепей, Марков занимался и общими вопросами теории вероятностей: он исследовал законы ошибок при измерениях со случайными мешающими параметрами (ветер, влажность воздуха и т.п.) и установил, каким образом по нескольким измерениям установить наиболее точное значение измеряемой величины с указанием числовых интервалов, в которых измеряемое значение находится с большой вероятностью. При исследовании результатов многократных случайных воздействий на результаты измерений применяется закон больших чисел (ЗБЧ), который говорит, что если число экспериментов достаточно велико, то частота возникновения того или иного воздействия практически достоверно равна некоторому числу. ЗБЧ применяется повсеместно, например, с его помощью артиллеристы оценивают центр рассеивания мест падения снарядов и в соответствии с этими оценками ведут прицельную стрельбу. Или другой пример – броуновское движение. Заключенный в сосуде газ состоит из хаотично движущихся молекул, но случай, когда все молекулы одновременно начнут двигаться в одну сторону, невозможен; давление газа на все стенки сосуда одинаково, поскольку частота ударов молекул об эти стенки (а именно это и есть давление газа) одинакова во всех направлениях.

Выдающийся ученик П.Л.Чебышёва – Александр Михайлович Ляпунов (25.5.1857–3.11.1918) начал свою научную деятельность с исследования фигур равновесия однородной вращающейся жидкости. Эту задачу предложил ему П.Л.Чебышёв; возникла она еще во времена Ньютона и была важна для решения многих вопросов астрономии. Она требовала составления и решения чрезвычайно сложных дифференциальных уравнений с частными производными. Чебышёв исследовал следующий вопрос: если при некоторой скорости вращения ω жид-

кость принимает форму эллипсоида, то какую форму она может принять, если скорость вращения увеличить на небольшое число δ . Строгое и абсолютно точное решение Ляпуновым этой задачи было опубликовано в иностранных изданиях только в начале XX века; в это же время великий французский ученый Анри Пуанкаре (29.4.1854–19.7.1912), опубликовал свое основанное не столько на строгих выводах, сколько на своих великолепных интуитивных соображениях, решение этой задачи.

В начале XX в. астроном Дарвин (1845–1912), сын Чарльза Дарвина, опираясь на результаты Пуанкаре, предложил космогоническую теорию, опиравшуюся на то, что вращающиеся массы грушевидной формы устойчивы. Ляпунов показал, что исходная предпосылка Дарвина неверна.

Исследуя обыкновенные дифференциальные уравнения, А.М.Ляпунов изучал вопросы устойчивости движения. Движение, или изменение состояния некой системы может практически не меняться, если начальное положение и начальную скорость изменения состояния системы немного изменить; в этом случае система называется устойчивой. Если же при незначительном изменении начальных условий дальнейшее поведение системы меняется существенно, – то система неустойчива. Это можно проиллюстрировать следующим примером. Если шарик расположить близко от дна ямки, то небольшое изменение начального положения шарика не повлияет существенно на его конечное положение: он все равно окажется внизу – решение этой задачи устойчиво.



Если же шарик положить на вершину горки, то малейшее изменение его положения приведет к существенному изменению поведения шарика: он либо останется на вершине (если его очень аккуратно и точно

положить на вершину), либо скатится с горки, и конечные его положения будут намного отличаться друг от друга – решение этой задачи неустойчиво. А.М.Ляпунов ввел числовые характеристики устойчивости движения; в мировой математике широко применяется понятие «устойчивость по Ляпунову».

Кроме этого, А.М.Ляпунов абсолютно строго доказал центральную предельную теорему теории вероятностей (ЦПТ), которая позволяет определить вероятностный закон для определенным образом усредненной суммы большого числа величин, каждая из которых случайна (например, это – ошибки измерения во многократно проводя-

щихся экспериментах). Для доказательства ЦПТ он разработал аппарат специальных, так называемых производящих, функций. ЦПТ чрезвычайно важна в практических приложениях теории вероятностей и математической статистики.

Софья Васильевна Ковалевская (Корвин-Круковская, 15.01.1850–10.2.1891) познакомилась с математикой в детстве, когда стены ее комнаты из-за нехватки обоев оклеили страницами из курса дифференциального и интегрального исчисления М.В.Остроградского; позднее оставшиеся в памяти непонятные значки и формулы помогли Софье легко овладеть высшей математикой. Но, поскольку в России тогда женщинам нельзя было учиться в университетах, а за границу могла поехать только замужняя дама, она вступила в фиктивный брак с В.О.Ковалевским, позднее известным палеонтологом. С трудом добилась С.В.Ковалевская права посещать занятия в Гейдельбергском университете, но она мечтала учиться в Берлине, где работал выдающийся математик Карл Вейерштрасс (15.10.1815–19.2.1897). Но, когда в 1871 г. она приехала в Берлин, ее не пустили даже на порог университета, – и Софья направилась домой к Вейерштрассу. Ученый, желая отвязаться от назойливой барышни, предложил ей несколько чрезвычайно сложных задач, но Софья быстро их решила, и пораженный ее способностями Вейерштрасс согласился заниматься с ней частным образом; позднее Софья стала его любимым учеником. В 1874 г. по ходатайству Вейерштрасса Геттингенским университетом С.В.Ковалевской была присвоена степень доктора философии. Когда С.В.Ковалевская вернулась в Петербург, работу она получить не могла, и, будучи деятельной натурой, она увлеклась финансовыми спекуляциями. Однако успеха ни в Петербурге, ни позднее в Москве она не имела, и в 1881 г. вернулась в Берлин. К этому времени ее фиктивный брак превратился в фактический и родилась дочь Соня; погиб В.О.Ковалевский. С трудом пережив личную трагедию и финансовые потери, С.В.Ковалевская вернулась к занятиям наукой. Известный шведский математик М.Г.Миттаг-Леффлер (16.3.1846–7.7.1927, именно из-за конфликта с ним А.Нобель исключил математиков из числа претендентов на Нобелевскую премию; сейчас самой престижной премией для математиков является Филдсовская) помог ей стать профессором в Стокгольме, где она работала до конца жизни. В 1889 г. по представлению П.Л.Чебышёва она стала членом-корреспондентом Российской Академии.

Областью интересов С.В.Ковалевской были в основном задачи математической физики, т.е. дифференциальные уравнения с частными производными. С.В.Ковалевская исследовала вопрос о том, когда эти

уравнения имеют решения (понятно, что не всякое уравнение разрешимо: например, нет решений у уравнения $e^x=0$). Кроме того, как Эйлер, Ж.Л.Лагранж (15.1.1736–10.4.1813) и Л.Пуансо (3.1.1777–5.12.1859), Ковалевская решала задачу о вращении твердого тела (в зависимости от того, где закреплено тело – выше центра тяжести, ниже него или в центре тяжести, получаются разные уравнения и разные характеристики вращения тела). Представив свою работу на конкурс в Парижской Академии, С.В.Ковалевская победила, и теперь в теоретической механике известно три принципиально разных случая вращения твердого тела – Эйлера, Пуансо и Ковалевской.

Московская математическая школа. В 1810 г. группа молодых дворян, студентов Московского университета, решила организовать общество любителей математики, целью которого было улучшение преподавания в Москве математических наук и перевод лучших зарубежных математических книг; молодых людей поддержал отец одного из них, крупный вельможа, по настоянию которого в перечень изучаемых наук были включены фортификация и артиллерия. Однако из-за Отечественной войны 1812 г. работа общества прекратилась.

Во второй половине XIX века в Московском университете работал *Николай Дмитриевич Брашман* (14.6.1796–13.5.1866), замечательный педагог, существенно улучшивший преподавание математики в университете. 15 сентября 1864 г. частный кружок математиков, собиравшихся на квартире у Брашмана, решил составить своими силами Московское Математическое Общество (ММО), ставившее своими целями не только совершенствование преподавания математики и перевод на русский язык трудов известных ученых, но и развитие собственно математической науки и издание собственных оригинальных математических работ на русском языке; уже в апреле 1865 г. вышел первый номер «Математического сборника» – первого русского научного издания на русском языке и одного из старейших в мире математических журналов. В 1866 г. Устав ММО был высочайше утвержден императором и «Математических сборник» включен в список обязательных закупок библиотек всех учебных заведений России.

Благодаря работе ММО в Москве появляются молодые талантливые ученые, расцвет деятельности которых приходится на начало XX века. Возникновение и развитие Московской математической школы связано с именами *Дмитрия Фёдоровича Егорова* (22.12.1869–10.9.1931), получившего важные результаты в геометрии, теории множеств и теории функций, и *Николая Николаевича Лузина* (9.12.1883–25.2.1950), занимавшегося, в основном, теорией функций и подгото-

вившего много замечательных математиков. Это *Павел Сергеевич Александров* (7.5.1896–16.11.1982), *Дмитрий Евгеньевич Меньшов* (18.4.1892–25.11.1988), *Александр Яковлевич Хинчин* (19.7.1894–18.11.1959), *Павел Самуилович Урысон* (3.2.1898–17.8.1924), и многие другие.

Вокруг Лузина формируется кружок молодых математиков, занимающихся не только традиционными математическими дисциплинами, но и новыми, только начинающими развиваться направлениями (например, топологией). Не все достижения отечественных математиков можно изложить с использованием терминов только элементарной математики. Остановимся на теории чисел.

В нашей стране была решена проблема Варинга (Эдуард Варинг (1736–1798) в 1770 г. предложил доказать, что для любого натурального n любое целое число N может быть представлено как сумма ограниченного числа n -х степеней целых чисел – с ростом числа N не должно увеличиваться до бесконечности число слагаемых, т.е. решение вида $N=1^n+1^n+1^n+\dots+1^n$ не годится. Лагранж, исследовавший эту проблему, показал, что при $n=2$ достаточно четырех слагаемых, например: $7=2^2+1^2+1^2+1^2$, $14=3^2+2^2+1^2$, $55=7^2+2^2+1^2+1^2$, $286=16^2+5^2+2^2+1^2$ и т.д.). Академик *И.М.Виноградов* (14.9.1891–20.3.1983) решил проблему Варинга, используя чрезвычайно сложный, специально для этого созданный математический аппарат, а в 1942 г. *Ю.В.Линник* (21.1.1915–30.6.1972) нашел элементарное решение.

Другая задача теории чисел – проблема Гольдбаха: доказать, что любое натуральное число, большее трех, можно представить в виде суммы трех простых. В попытках решить эту проблему многими математиками просто перебирались натуральные числа – вплоть до 9000000. В 1930 г. *Лев Генрихович Шнирельман* (2.1.1905–24.9.1938) доказал, что для представления числа в виде суммы простых числа потребуется на более, чем (примерно) 800000 простых чисел. В 1935 г. *Н.П.Романов* доказал, что число слагаемых не более 2208, в 1937 г. *И.М.Виноградов* показал, что, начиная с некоторого (очень большого) числа M все числа можно представить как сумму трех простых.

В теории чисел российские математики исследовали также и законы распределения простых чисел.

Самым выдающимся математиком XX века не только России, но и всего мира стал *Андрей Николаевич Колмогоров* (25.4.1903–20.10.1987), ученик Н.Н.Лузина. Его исследования в теории функций, в топологии и теории множеств намного опередили исследования математиков всего мира. Принято считать, что основные этапы развития современной

математики – это время работы пяти великих математиков – Ньютона, Эйлера, Гаусса, Пуанкаре и Колмогорова.

Важнейшим вкладом А.Н.Колмогорова стала публикация им нового, аксиоматического построения теории вероятностей. До Колмогорова теория вероятностей создавалась как теория частот каких-то событий при большом количестве экспериментов; построение математического аппарата теории вероятностей требовало поэтому чрезвычайно сложной и запутанной математической техники. Аксиоматика Колмогорова связала воедино теорию множеств, теорию функций и теорию вероятностей. Новая аксиоматика позволила обосновать теоретически многие ранее интуитивно делавшиеся в теории вероятностей выводы; стало возможным развитие теории случайных непрерывных процессов, например, точное математическое описание броуновского движения. На основании теории вероятностей сейчас рассчитываются демографические процессы и ядерные реакции, определяется надежность космических аппаратов и оптимальное количество запасных деталей для, например, космического полета, определяются оптимальные процедуры для деятельности больших вычислительных сетей и автомобильных трасс, – т.е. везде, где на работу систем влияет случайность.

А.Н.Колмогоров был не только великим ученым, но и выдающим педагогом – многие его ученики стали известными во всем мире математиками (например, академик *Владимир Игоревич Арнольд*). По инициативе Колмогорова в Москве была создана школа-интернат №18 при Московском университете для одаренных детей.

Советская математическая школа. В 1934 г. Академия наук СССР была переведена в Москву, переехал также и Институт Математики АН СССР. Соперничавшие ранее между собой представители ленинградской (петербургской) и московской математических школ стали работать вместе. Занимавшиеся уравнениями математической физики и теорией вероятностей ленинградцы вместе с московскими топологами, геометрами и специалистами по функциональному анализу образовали вместе то, что стало одной из мощнейших научных школ в мире – *советскую математическую школу*. Несмотря на то, что часть талантливых математиков была репрессирована, а позднее многие молодые математики погибли в 1941–1945 гг., советская математическая школа вплоть до распада СССР была ведущей в мире. Кроме московской математической школы стали расти научные кадры на периферии СССР, в среднеазиатских республиках (Узбекская и Казахская теоретико-вероятностные школы), в Прибалтике, продолжали активную научную деятельность украинские математики. Естественно, в это время

все научные силы были брошены на укрепление военной мощи СССР, и это способствовало бурному развитию связанных с военной техникой математических дисциплин – в уравнениях математической физики и в теории вероятностей. Исследования в области функционального анализа и геометрии также были необходимы, например, при конструировании авиационной техники.

Во время Великой Отечественной Войны многие отечественные математики переключились на решение связанных с обороной страны задач. Так, А.Н.Колмогоров за 2 недели произвел расчет таблиц бомбометания для тихоходных ночных бомбардировщиков (большинство скоростных самолетов было уничтожено в первые дни войны). *Б.В.Гнеденко*, проанализировав статистику брака оборонных заводов (на которых теперь работали подростки), разработал алгоритм использования бракованных деталей, что дало возможность повысить производительность. *Л.С.Понтрягин* переключился на изучение колебаний вращающегося снаряда с учетом сопротивления воздуха.

Что будет дальше? С развитием вычислительной техники начинает понемногу меняться и лицо современной математики. Мы уже видели, как удобство или неудобство системы нумерации для вычислений влияло на математические методы: там, где арифметика была трудна, развивались геометрические методы, повлекшие за собой аксиоматизацию математики. В других условиях, при использовании десятичной позиционной нумерации, развивались алгебраические методы, не возникало проблемы несоизмеримости, математика строилась конструктивно. Сейчас, когда огромный массив вычислений можно выполнить за считанные секунды на компьютере, математика тоже меняется. Бурно развиваются методы дискретной математики, вычислительные методы, некоторые из которых невозможно осуществить без использования вычислительной техники. Возникают новые методы доказательства математических гипотез. Например, знаменитая задача о раскраске карты (сколько красок достаточно для раскраски произвольной географической карты так, чтобы два участка одного цвета не соприкасались более, чем в конечном числе точек?) была решена с помощью машинного перебора некоторых типов конфигурации карты.

Возможно, скоро доказательства теорем станут, в дополнение к обычным дедуктивным, текст программы и распечатка.

Но, оглядываясь на многовековую историю математики, можно предположить, что она, впитав в себя новые приемы, сохранит созданное многими поколениями ученых богатство своих теорий и, как и прежде, в своем развитии будет смотреть не только вглубь себя, но и

извлекать новые постановки задач, новые методы их решения и новые теоретические методы из новых практических проблем, которые будут ставить перед собой человек.

Рекомендуемая литература.

1. История математики. п/ред А.П. Юшкевича. М., 1970. Т.1-3.
2. Д.Стройк. Очерки по истории математики. М., разные годы издания.
3. Б.В.Гнеденко. Очерки по истории математики в России. М.-Л., 1939.
4. Б.Л.Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. М., 1956.

Св.план 2005 г., поз.83.

Зверкина Галина Александровна

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Подписано в печать – **25.10.05.** Тираж – **100.**

Усл. печ. л. – **6,75.** Формат – **60×84/16.**

Заказ – **582.**

127994, Москва, ул.Образцова, 15

Типография МИИТа